

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní program: MIUPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (20 bodů)

- (a) V závislosti na parametrech $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{an + b}{an + c} \right)^n.$$

- (b) V závislosti na parametru $k \in \mathbb{N}$ rozhodněte o konvergenci následující řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn + 1)^n (2n)!}{n^{2n+1} n! 8^n}.$$

Jednotlivé kroky řádně zdůvodněte.

Úloha 2 (20 bodů)

- (a) At'

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x < y < x + 1, \\ -1, & \text{pokud } x - 1 < y < x, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Rozhodněte, zda platí

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx.$$

- (b) Spočtěte

$$\int_M \frac{x}{1 + xy} dx dy,$$

kde $M = [0, 1] \times [0, 2]$.

Úloha 3 (20 bodů)

Uvažujme množinu M sestávající ze všech různých binárních vyhledávacích stromů, které jsou tvořeny právě sedmi vrcholy s hodnotami 1, 10, 13, 20, 25, 30, 44.

- (a) Určete prvek M s minimální hloubkou a prvek M s maximální hloubkou.
(b) Určete, pro kolik prvků množiny M platí, že hloubka levého podstromu kořene je rovna hloubce pravého podstromu kořene.

Pozn.: Hloubka stromu je délka nejdelší cesty z kořene do listu. Tak např. strom obsahující právě dva vrcholy má vždy hloubku 1.

Úloha 4 (20 bodů)

Mějme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$. Sestrojte deterministický konečný automat, který přijímá právě řetězce, které obsahují sudý počet a a neobsahují podřetězec $abab$. Automat má přijímat například prázdné slovo a slovo $abbaaa$, nemá přijmout $aababaaa$ ani bab . Doporučený, nepovinný postup:

- (a) Sestrojte automat, který přijímá řetězce obsahující $abab$.
(b) Sestrojte automat, který přijímá řetězce neobsahující $abab$.

- (c) Sestrojte automat, který přijímá řetězce se sudým počtem a .
- (d) Zkombinujte druhý a třetí automat dohromady.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní program: MIUPN

Varianta A – Řešení

Úloha 1 (20 bodů)

- (a) Pokud $b = c$, pak výsledek je triviálně 1. Předpokládejme tedy nadále, že $b \neq c$. Víme, že pro velká n platí:

$$\left(\frac{an+b}{an+c}\right)^n = e^{n \log\left(\frac{an+b}{an+c}\right)}.$$

Ze spojitosti exponenciály a Heineho věty tedy plyne, že pokud

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right) = A \in \mathbb{R},$$

pak hledaný výsledek je e^A . Protože $a \neq 0$ a $b \neq c$, tak $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{ax+c} = 1$ a $\frac{ax+b}{ax+c} \neq 1$ pro $x \neq -\frac{c}{a}$. Můžeme tedy substituovat $y = \frac{ax+b}{ax+c}$ a s pomocí věty o limitě složené funkce a známé limity $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$ obdržíme:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)}{\frac{ax+b}{ax+c} - 1} \cdot \left(\frac{ax+b}{ax+c} - 1\right) x \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b-c)x}{ax+c} = \frac{b-c}{a}. \end{aligned}$$

Výsledek je tedy $e^{\frac{b-c}{a}}$.

- (b) Použijeme limitní podílové kritérium:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)(kn+k+1)}{8(n+1)^3} \left(\frac{kn+k+1}{kn+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{k}{2} \cdot e \cdot e^{-2} = \frac{k}{2e}. \end{aligned}$$

Tedy řada je konvergentní pro $k \leq 5$ a divergentní pro $k \geq 6$. Při výpočtu jsme použili část (a):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{kn+k+1}{kn+1}\right)^n &= e, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+1} &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = (e^{-1})^2 \cdot 1 = e^{-2}. \end{aligned}$$

Úloha 2 (20 bodů)

- (a) Pro $y \geq 1$ je zjevně $\int_0^{+\infty} f(x, y) dx = 1 - 1 = 0$. Pro $0 \leq y < 1$ je $\int_0^{+\infty} f(x, y) dx = y - 1$. Celkově tedy vychází integrál vlevo jako $\int_0^1 (y-1) dy = [\frac{1}{2}y^2 - y]_0^1 = -\frac{1}{2}$. Symetrickým výpočtem dostaneme, že integrál vpravo je roven $\frac{1}{2}$. Rovnost integrálů tedy v uvedeném případě neplatí.

(b) Množina $[0, 1] \times [0, 2]$ je kompaktní a integrovaná funkce je na této množině spojitá, tedy omezená a celkově proto integrovatelná. Můžeme proto použít Fubiniovu větu a počítat standardním výpočtem s využitím metody per-partes:

$$\begin{aligned} \int_M \frac{x}{1+xy} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{x}{1+xy} dy \right) dx = \int_0^1 \left([\log(1+xy)]_{y=0}^{y=2} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \log(1+2x) dx = [x \log(1+2x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+2x} dx = \\ &= \log 3 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+2x} \right) dx = \log 3 - 1 + \left[\frac{1}{2} \log(1+2x) \right]_0^1 = \\ &= \log 3 - 1 + \frac{1}{2} \log 3 = \frac{3}{2} \log 3 - 1. \end{aligned}$$

Úloha 3 (20 bodů)

- (a) Minimální hloubka je 2. Takový strom má kořen 20 s dětmi 10 a 30, ostatní hodnoty jsou na listech. Maximální hloubka je 6. Tu mají stromy, kde na každé hladině je jen jeden vrchol.
- (b) Má-li mít prvek množiny M levý a pravý podstrom kořene o stejné hloubce, pak v jeho kořeni musí být hodnota 20. V opačném případě by jeden z podstromů kořene musel obsahovat nejvýše 2 vrcholy a druhý z podstromů kořene by musel obsahovat nejméně 4 vrcholy. Pak by ale uvedené podstromy nemohly mít stejnou hloubku.

Jestliže má prvek množiny M v kořeni hodnotu 20, pak levý i pravý podstrom kořene obsahují právě 3 prvky a mohou mít hloubku 1, anebo 2.

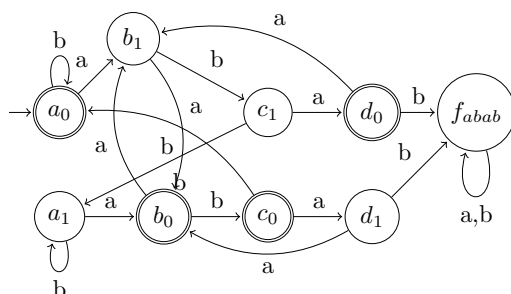
Při hloubce podstromů 1 je celý strom jednoznačně určen, viz (a).

Při hloubce podstromů 2 existují právě 4 možnosti, jak může vypadat levý podstrom – buď je v jeho kořeni hodnota 13 a v listu 1, nebo 10, anebo je v jeho kořeni 1 a v listu 10, nebo 13. Podobné platí, že existují právě 4 možnosti, jak může vypadat pravý podstrom. Celkem tedy existují 4×4 prvky množiny M s kořenem 20 a hloubkou levého i pravého podstromu 2.

Závěr: Existuje právě $1 + 16 = 17$ prvků množiny M s uvedenou vlastností.

Úloha 4 (20 bodů)

Obrázek ukazuje přechodovou funkci výsledného řešení.



- (a) Automat přijímající řetězce obsahující $abab$ by obsahoval pouze stavy $a_0, b_1, c_1, d_0, f_{abab}$, stav a_0 by byl počáteční, stav f_{abab} přijímající, ve stavu b_1 by byla smyčka čtoucí a a hrana z c_1 označená b by směřovala do a_0 .
- (b) Automat nepřijímající řetězce obsahující $abab$ se od předchozího liší pouze v přijímajících stavech. Přijímající by byly všechny stavy kromě stavu f_{abab} , tedy a_0, b_1, c_1, d_0 .

- (c) Automat přijímající se sudým počtem a by obsahoval pouze stavy b_0, b_1 , stav b_0 by byl počáteční a zároveň jediný přijímající, přechodovou funkci by bylo třeba doplnit o smyčky u b_0 i b_1 čtoucí symbol b .
- (d) Automaty zkombinujeme tak, že vytvoříme dvě kopie automatu ne-přijímající $abab$, které se budou lišit paritou přečtených a . Přijímající jsou pouze stavy s indexem 0, tedy sudým počtem přečtených a a nepřečteným $abab$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní program: MIUPN

Varianta B

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (20 bodů)

Spočtěte

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{6 + 11 \cos x + 6 \cos^2 x + \cos^3 x} dx$$

na maximálních možných intervalech a tyto intervaly určete.

Úloha 2 (20 bodů)

(a) Ukažte, že množina bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pro které

$$x^2 + 4y^2 \cos x - z^2 = 2xyz,$$

je na nějakém okolí bodu $(0, 1, 2)$ grafem spojitě diferencovatelné funkce $f(x, y)$, která je definovaná na jistém okolí bodu $(0, 1)$ a splňuje $f(0, 1) = 2$.

(b) Spočtěte parciální derivaci f podle x v bodě $(0, 1)$.

(c) Spočtěte totální diferenciál f v bodě $(0, 1)$.

(d) Má funkce f v bodě $(0, 1)$ lokální minimum?

Pokud používáte větu o implicitních funkcích, ověřte její předpoklady.

Úloha 3 (20 bodů)

Určete, kolikrát napíšete číslici 1, jestliže zapíšete za sebou prvních 2000 kladných celých čísel.

Úloha 4 (20 bodů)

Je dán následující program (zadání v Pascalu, v C a v Pythonu jsou ekvivalentní):

```
program BB;
var a, b, p: integer;
begin
  read(a, b);
  p := 1;
  while a mod 2 = b mod 2 do
  begin
    a := a div 2;
    b := b div 2;
    p := p + 1;
  end;
  write(p)
end.
```

```
#include <stdio.h>
void main(void)
{
  int a, b, p;
  scanf("%i", &a);
  scanf("%i", &b);
  p = 1;
  while (a % 2 == b % 2)
  {
    a /= 2;
    b /= 2;
    p++;
  }
  printf("%i", p);
}
```

```
a = int(input())
b = int(input())
p = 1
while a % 2 == b % 2:
    a /= 2
    b /= 2
    p += 1
print(p)
```

- a) Určete, jaký výsledek obdržíme při výpočtu se vstupními hodnotami $a = 1536$, $b = 1024$.
- b) Určete, jaký výsledek obdržíme při výpočtu se vstupními hodnotami $a = 24000$, $b = 24000$.
- c) Určete všechny dvojice jednociferných kladných vstupních hodnot a , b , pro které skončí výpočet s výsledkem 4.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní program: MIUPN

Varianta B – Řešení

Úloha 1 (20 bodů)

Integrál nejdříve upravíme

$$I = \int \frac{\tan x}{6 + 11 \cos x + 6 \cos^2 x + \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x (6 + 11 \cos x + 6 \cos^2 x + \cos^3 x)} dx.$$

Po substituci $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$ dostáváme

$$I = - \int \frac{1}{t(6 + 11t + 6t^2 + t^3)} dt = - \int \frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)} dt.$$

Zde použijeme rozklad na parciální zlomky. Protože máme jen jednonásobné reálné kořeny, můžeme použít zakrývací pravidlo. Obdržíme

$$\frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)} = \frac{1}{6t} - \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t+2)} - \frac{1}{6(t+3)}.$$

Tak dostaneme

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{6} \int \frac{1}{t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+2} dt + \frac{1}{6} \int \frac{1}{t+3} dt \stackrel{c}{=} \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{6} \log |t| + \frac{1}{2} \log |t+1| - \frac{1}{2} \log |t+2| + \frac{1}{6} \log |t+3| = \\ &= -\frac{1}{6} \log |\cos x| + \frac{1}{2} \log(\cos x + 1) - \frac{1}{2} \log(\cos x + 2) + \frac{1}{6} \log(\cos x + 3). \end{aligned}$$

Maximální intervaly jsou $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$, $(\frac{\pi}{2}, \pi) + 2k\pi$ a $(\pi, \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Úloha 2 (20 bodů)

(a) Označme $F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 \cos x - z^2 - 2xyz$. Zřejmě F je spojitě diferencovatelná funkce, $F(0, 1, 2) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -2z - 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 2) = -4 \neq 0,$$

tedy množina $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, z) = 0\}$ je podle věty o implicitních funkcích na nějakém okolí bodu $(0, 1, 2)$ grafem spojitě diferencovatelné funkce f , pro kterou $f(0, 1) = 2$.

(b) Snadno spočteme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 4y^2 \sin x - 2yz, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 2) = -4.$$

Z věty o implicitních funkcích pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 2)},$$

tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -1.$$

(c) Podobně jako v (b) spočteme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 8y \cos x - 2xz, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1, 2) = 8,$$

tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2.$$

Ze spojitosti parciálních derivací plyne existence totálního diferenciálu, a tedy $Df(0, 1)(h, k) = -h + 2k$.

(d) Parciální derivace f v bodě $(0, 1)$ jsou (dokonce obě) nenulové, tedy není splněna nutná podmínka pro existenci lokálního extrému v bodě $(0, 1)$. Funkce f tedy lokální extrém v bodě $(0, 1)$ nemá.

Úloha 3 (20 bodů)

Představme si, že čísla menší než 1000 doplníme vedoucími nulami na čtyřciferná čísla. Tyto přidané nuly nijak neovlivní počet napsaných číslic 1. Z uvažovaných dvou tisíc čísel 0001, 0002, ..., 1999, 2000 má každé desáté číslo jedničku v řádu jednotek, každé desáté má jedničku v řádu desítek, každé desáté má jedničku v řádu stovek. Dalších 1000 z těchto čísel má jedničku v řádu tisíců. Celkem tedy napíšeme $200 + 200 + 200 + 1000 = 1600$ číslic 1.

Úloha 4 (20 bodů)

Výsledná hodnota p určuje, v kolikáté cifře počítáno zprava se poprvé odliší dvojkové zápisy vstupních hodnot a, b .

a) Obě čísla vyjádříme ve dvojkové soustavě:

$$a = 11000000000$$

$$b = 10000000000$$

Výsledkem je tedy 10.

b) Dvojkové zápisy čísel $a = b$ jsou shodné, výpočet v cyklu nikdy neskončí (případně skončí běhovou chybou při přetečení hodnoty proměnné p).

c) Z jednociferných dekadických čísel mají čtyři dvojkové cifry ve svém zápise pouze 8 (1000) a 9 (1001). S číslem 8 se v posledních třech dvojkových cifrách shoduje 0, s číslem 9 se takto shoduje 1. Podmínkám úlohy tedy vyhovují tyto čtyři dvojice vstupních hodnot a, b : $(0, 8)$, $(1, 9)$, $(8, 0)$ a $(9, 1)$.