

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní programy: MAP, MMFP, MSPN, MITPN, MNVP, MPSPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)

(a) V závislosti na parametrech $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{an + b}{an + c} \right)^n.$$

(b) V závislosti na parametru $k \in \mathbb{N}$ rozhodněte o konvergenci následující řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn + 1)^n (2n)!}{n^{2n+1} n! 8^n}.$$

Jednotlivé kroky řádně zdůvodněte.

Úloha 2 (25 bodů)

(a) At'

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x < y < x + 1, \\ -1, & \text{pokud } x - 1 < y < x, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Rozhodněte, zda platí

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx.$$

(b) Spočtěte

$$\int_M \frac{x}{1 + xy} dx dy,$$

kde $M = [0, 1] \times [0, 2]$.

Úloha 3 (25 bodů)

Vyšetřete průběh (definiční obor, spojitost, symetrie, limity v krajních bodech, derivaci (včetně jednostranných derivací), monotonii, lokální a globální extrémy, obor hodnot, druhou derivaci, konvexitu, konkavitu, inflexní body, asymptoty a náčrt grafu) funkce definované předpisem

$$f(x) = \arctan(1 + x^3).$$

Úloha 4 (25 bodů)

V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem uvažujme vektory

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, -1), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 2, 3, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 6, 3).$$

(a) Najděte ortonormální bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ lineárního obalu vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

(b) Určete ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}_3$ na lineární obal vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

(c) Najděte vektor $\mathbf{u}_4$, aby $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ byla ortonormální báze $\mathbb{R}^4$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní programy: MAP, MMFP, MSPN, MITPN, MNVP, MPSPN

Varianta A – Řešení

Úloha 1 (25 bodů)

- (a) Pokud $b = c$, pak výsledek je triviálně 1. Předpokládejme tedy nadále, že $b \neq c$. Víme, že pro velká n platí:

$$\left(\frac{an+b}{an+c}\right)^n = e^{n \log\left(\frac{an+b}{an+c}\right)}.$$

Ze spojitosti exponenciály a Heineho věty tedy plyne, že pokud

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right) = A \in \mathbb{R},$$

pak hledaný výsledek je e^A . Protože $a \neq 0$ a $b \neq c$, tak $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{ax+c} = 1$ a $\frac{ax+b}{ax+c} \neq 1$ pro $x \neq -\frac{c}{a}$. Můžeme tedy substituovat $y = \frac{ax+b}{ax+c}$ a s pomocí věty o limitě složené funkce a známé limity $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$ obdržíme:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)}{\frac{ax+b}{ax+c} - 1} \cdot \left(\frac{ax+b}{ax+c} - 1\right) x \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b-c)x}{ax+c} = \frac{b-c}{a}. \end{aligned}$$

Výsledek je tedy $e^{\frac{b-c}{a}}$.

- (b) Použijeme limitní podílové kritérium:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)(kn+k+1)}{8(n+1)^3} \left(\frac{kn+k+1}{kn+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{k}{2} \cdot e \cdot e^{-2} = \frac{k}{2e}. \end{aligned}$$

Tedy řada je konvergentní pro $k \leq 5$ a divergentní pro $k \geq 6$. Při výpočtu jsme použili část (a):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{kn+k+1}{kn+1}\right)^n &= e, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+1} &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = (e^{-1})^2 \cdot 1 = e^{-2}. \end{aligned}$$

Úloha 2 (25 bodů)

- (a) Pro $y \geq 1$ je zjevně $\int_0^{+\infty} f(x, y) dx = 1 - 1 = 0$. Pro $0 \leq y < 1$ je $\int_0^{+\infty} f(x, y) dx = y - 1$. Celkově tedy vychází integrál vlevo jako $\int_0^1 (y-1) dy = [\frac{1}{2}y^2 - y]_0^1 = -\frac{1}{2}$. Symetrickým výpočtem dostaneme, že integrál vpravo je roven $\frac{1}{2}$. Rovnost integrálů tedy v uvedeném případě neplatí.

(b) Množina $[0, 1] \times [0, 2]$ je kompaktní a integrovaná funkce je na této množině spojitá, tedy omezená a celkově proto integrovatelná. Můžeme proto použít Fubiniovu větu a počítat standardním výpočtem s využitím metody per-partes:

$$\begin{aligned}\int_M \frac{x}{1+xy} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{x}{1+xy} dy \right) dx = \int_0^1 \left([\log(1+xy)]_{y=0}^{y=2} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \log(1+2x) dx = [x \log(1+2x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+2x} dx = \\ &= \log 3 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+2x} \right) dx = \log 3 - 1 + \left[\frac{1}{2} \log(1+2x) \right]_0^1 = \\ &= \log 3 - 1 + \frac{1}{2} \log 3 = \frac{3}{2} \log 3 - 1.\end{aligned}$$

Úloha 3 (25 bodů)

- (1) Definiční obor f je $\mathbb{R}$ a f je na něm spojitá.
- (2) Funkce není sudá, lichá, ani periodická.
- (3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm \frac{\pi}{2}$.
- (4) Platí

$$f'(x) = \frac{3x^2}{1 + (1+x^3)^2}$$

Definiční obor f' je $\mathbb{R}$.

- (5) Vidíme, že $f'(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$. Dále vidíme, že $f'(x) > 0$ pro $x \neq 0$. Odtud
 - (a) f je rostoucí na $\mathbb{R}$ (lze určit i elementární úvahou),
 - (b) f nemá žádné lokální ani globální extrémy,
 - (c) obor hodnot f je tedy $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- (6) Dále

$$f''(x) = \frac{-6x(2x^6 + x^3 - 2)}{(x^6 + 2x^3 + 2)^2}.$$

Definiční obor f'' je $\mathbb{R}$.

- (7) Vidíme, že $f''(x) = 0$ pokud $x = 0$, nebo $t = x^3$ řeší rovnici

$$2t^2 + t - 2 = 0.$$

Dostaneme řešení $t = \frac{\pm\sqrt{17}-1}{4}$ a tedy $x = \sqrt[3]{\frac{\pm\sqrt{17}-1}{4}}$.

Dále platí

$$f''(x) < 0 \iff x \in \left(\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{17}-1}{4}}, 0 \right) \cup \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}, +\infty \right)$$

a

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{17}-1}{4}} \right) \cup \left(0, \sqrt[3]{\frac{\sqrt{17}-1}{4}} \right)$$

- (8) Odtud (f je spojitá)

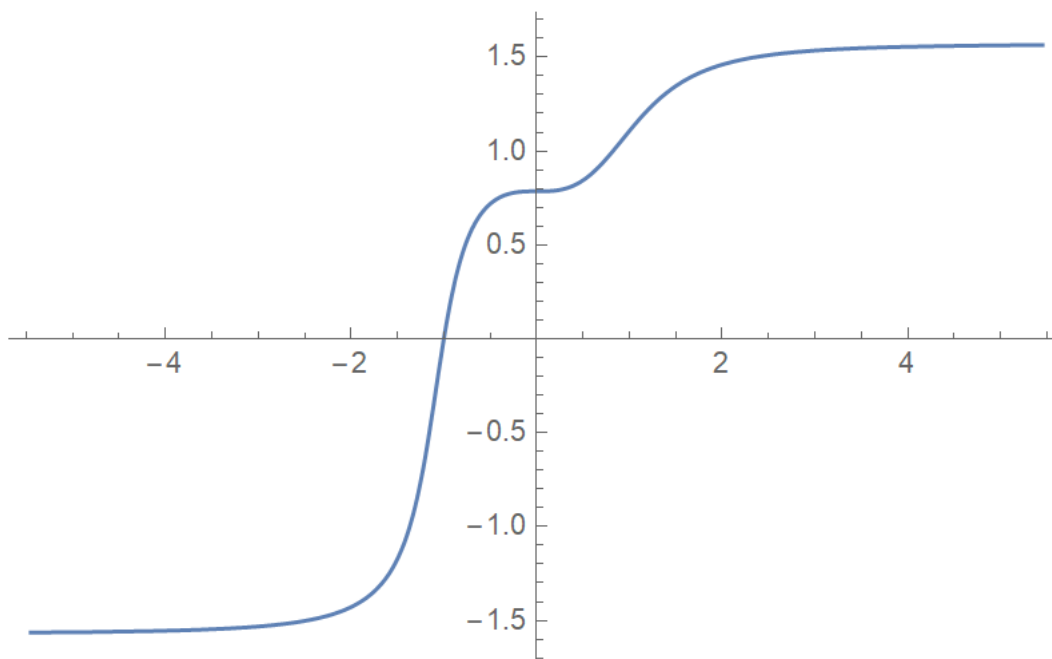
$$(a) \ f \text{ je konkávní na } \left[\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{17}-1}{4}}, 0 \right] \text{ a } \left[\sqrt[3]{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}, +\infty \right),$$

(b) f je konvexní na $\left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{17}-1}{4}}\right]$ a $\left[0, \sqrt[3]{\frac{\sqrt{17}-1}{4}}\right]$

(c) f má inflexní body v 0 a $\sqrt[3]{\frac{\pm\sqrt{17}-1}{4}}$.

(9) Asymptoty v $\pm\infty$ už víme, jsou to $y = \frac{\pi}{2}$, resp. $y = -\frac{\pi}{2}$.

(10) Graf:



Úloha 4 (25 bodů)

(a) Použijeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces. Nejprve najdeme ortogonální bázi $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$, kterou následně znormujeme.

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, -1), \quad \|\mathbf{w}_1\|^2 = 6$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = (2, 2, 3, 0) - \frac{6}{6}(2, 1, 0, -1) = (0, 1, 3, 1), \quad \|\mathbf{w}_2\|^2 = 11$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 \right) = (1, 1, 6, 3) - \left(\frac{0}{6}(2, 1, 0, -1) + \frac{22}{11}(0, 1, 3, 1) \right) = \\ &= (1, -1, 0, 1), \quad \|\mathbf{w}_3\|^2 = 3 \end{aligned}$$

Jedna z ortonormálníchází prostoru generovaného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ je

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) &= \left(\frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}, \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}, \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{11}}(0, 1, 3, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0, 1) \right). \end{aligned}$$

(b) Podprostor generovaný vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ je roven podprostoru generovanému vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$. Ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}_3$ na tento podprostor odečítáme od vektoru $\mathbf{v}_3$ při výpočtu vektoru $\mathbf{w}_3$, je rovná $\frac{22}{11}(0, 1, 3, 1) = (0, 2, 6, 2)$.

- (c) Najdeme nenulový vektor $\mathbf{w}_4$, který je kolmý na vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$. Požadavek $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_4 = 0$ pro $i = 1, 2, 3$ je ekvivalentní tomu, že $\mathbf{w}_4$ je řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s následující maticí.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Nenulovým řešením je např. $\mathbf{w}_4 = (0, 3, -2, 3)$ a po znormování $\mathbf{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{22}}(0, 3, -2, 3)$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní programy: MAP, MMFP, MSPN, MITPN, MNVP, MPSPN

Varianta B

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)

Spočtěte

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{6 + 11 \cos x + 6 \cos^2 x + \cos^3 x} dx$$

na maximálních možných intervalech a tyto intervaly určete.

Úloha 2 (25 bodů)

(a) Ukažte, že množina bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pro které

$$x^2 + 4y^2 \cos x - z^2 = 2xyz,$$

je na nějakém okolí bodu $(0, 1, 2)$ grafem spojitě diferencovatelné funkce $f(x, y)$, která je definovaná na jistém okolí bodu $(0, 1)$ a splňuje $f(0, 1) = 2$.

(b) Spočtěte parciální derivaci f podle x v bodě $(0, 1)$.

(c) Spočtěte totální diferenciál f v bodě $(0, 1)$.

(d) Má funkce f v bodě $(0, 1)$ lokální minimum?

Pokud používáte větu o implicitních funkcích, ověřte její předpoklady.

Úloha 3 (25 bodů)

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte následující limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\log i}{\log n} \right) \left(\sqrt{n^2 + \alpha} - \sqrt[3]{n^3 + 3n} \right) n^\alpha.$$

Jednotlivé kroky výpočtu řádně zdůvodněte.

Úloha 4 (25 bodů)

Uvažujme následující soustavu lineárních rovnic s neznámými $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ a parametrem $a \in \mathbb{R}$.

$$6x + (a + 5)y + 5z + (a + 1)w = 0$$

$$3x + 3y + 3z + 2w = 1$$

$$ax + y + az + w = 0$$

$$-x + 3y - z + 3w = 0$$

(a) Spočítejte determinant matice soustavy v závislosti na a .

(b) Rozhodněte, pro která a má daná soustava právě jedno řešení.

(c) Pro tato a vypočítejte neznámou z pomocí Cramerova pravidla.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní programy: MAP, MMFP, MSPN, MITPN, MNVP, MPSPN

Varianta B – Řešení

Úloha 1 (25 bodů)

Integrál nejdříve upravíme

$$I = \int \frac{\tan x}{6 + 11 \cos x + 6 \cos^2 x + \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x (6 + 11 \cos x + 6 \cos^2 x + \cos^3 x)} dx.$$

Po substituci $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$ dostáváme

$$I = - \int \frac{1}{t(6 + 11t + 6t^2 + t^3)} dt = - \int \frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)} dt.$$

Zde použijeme rozklad na parciální zlomky. Protože máme jen jednonásobné reálné kořeny, můžeme použít zakrývací pravidlo. Obdržíme

$$\frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)} = \frac{1}{6t} - \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t+2)} - \frac{1}{6(t+3)}.$$

Tak dostaneme

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{6} \int \frac{1}{t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+2} dt + \frac{1}{6} \int \frac{1}{t+3} dt \stackrel{c}{=} \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{6} \log |t| + \frac{1}{2} \log |t+1| - \frac{1}{2} \log |t+2| + \frac{1}{6} \log |t+3| = \\ &= -\frac{1}{6} \log |\cos x| + \frac{1}{2} \log(\cos x + 1) - \frac{1}{2} \log(\cos x + 2) + \frac{1}{6} \log(\cos x + 3). \end{aligned}$$

Maximální intervaly jsou $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$, $(\frac{\pi}{2}, \pi) + 2k\pi$ a $(\pi, \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Úloha 2 (25 bodů)

(a) Označme $F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 \cos x - z^2 - 2xyz$. Zřejmě F je spojitě diferencovatelná funkce, $F(0, 1, 2) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -2z - 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 2) = -4 \neq 0,$$

tedy množina $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, z) = 0\}$ je podle věty o implicitních funkcích na nějakém okolí bodu $(0, 1, 2)$ grafem spojitě diferencovatelné funkce f , pro kterou $f(0, 1) = 2$.

(b) Snadno spočteme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 4y^2 \sin x - 2yz, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 2) = -4.$$

Z věty o implicitních funkcích pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 2)},$$

tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -1.$$

(c) Podobně jako v (b) spočteme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 8y \cos x - 2xz, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1, 2) = 8,$$

tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2.$$

Ze spojitosti parciálních derivací plyne existence totálního diferenciálu, a tedy $Df(0, 1)(h, k) = -h + 2k$.

(d) Parciální derivace f v bodě $(0, 1)$ jsou (dokonce obě) nenulové, tedy není splněna nutná podmínka pro existenci lokálního extrému v bodě $(0, 1)$. Funkce f tedy lokální extrém v bodě $(0, 1)$ nemá.

Úloha 3 (25 bodů)

Z věty o dvou strážnících a z odhadů

$$\begin{aligned} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\log i}{\log n} &\geq \frac{\sum_{i=n+1}^{2n} \log n}{\log n} = n, \\ \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\log i}{\log n} &\leq \frac{\sum_{i=n+1}^{2n} \log(2n)}{\log n} = n \frac{(\log n + \log 2)}{\log n}, \end{aligned}$$

plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\log i}{\log n}}{n} = 1. \quad (1)$$

Ze spojitosti odmocnin a Heineovy věty plyne

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + \alpha}}{n} &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 3n}}{n} &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Pomocí vzorce $a - b = \frac{a^6 - b^6}{a^5 + a^4b + \dots + b^5}$ upravíme

$$\sqrt{n^2 + \alpha} - \sqrt[3]{n^3 + 3n} = \frac{n^6 + 3n^4\alpha + 3n^2\alpha^2 + \alpha^3 - n^6 - 6n^4 - 9n^2}{\left(\sqrt{n^2 + \alpha}\right)^5 + \dots + \left(\sqrt[3]{n^3 + 3n}\right)^5}.$$

Pak z (2) plyne

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + \alpha} - \sqrt[3]{n^3 + 3n} \right) n &= \frac{\alpha}{2} - 1 \quad \text{pro } \alpha \neq 2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + \alpha} - \sqrt[3]{n^3 + 3n} \right) n^3 &= \frac{1}{2} \quad \text{pro } \alpha = 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Pro $\alpha \neq 2$ pak z (3) a (1) dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\log i}{\log n} \right) \left(\sqrt{n^2 + \alpha} - \sqrt[3]{n^3 + 3n} \right) n^\alpha &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\log i}{\log n}}{n} \left(\sqrt{n^2 + \alpha} - \sqrt[3]{n^3 + 3n} \right) \cdot n \cdot n^\alpha = \\ &= \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \alpha > 2, \\ -\infty & \text{pro } \alpha \in (0, 2), \\ -1 & \text{pro } \alpha = 0, \\ 0 & \text{pro } \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Pro $\alpha = 2$ z (3) a (1) plyne

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\log i}{\log n} \right) \left(\sqrt{n^2 + \alpha} - \sqrt[3]{n^3 + 3n} \right) n^\alpha = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\log i}{\log n}}{n} \left(\sqrt{n^2 + \alpha} - \sqrt[3]{n^3 + 3n} \right) n^3 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Úloha 4 (25 bodů)

- (a) Determinant počítáme užitím elementárních úprav a rozvoje (v první úpravě přičítáme (-1) -násobek třetího sloupce k prvnímu a (-1) -násobek čtvrtého sloupce k druhému).

$$\begin{vmatrix} 6 & a+5 & 5 & a+1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ a & 1 & a & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & a+1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 1$$

Determinant matice soustavy je $3a + 1$.

- (b) Soustava má právě jedno řešení právě tehdy, když má matice soustavy nenulový determinant, tj. právě tehdy, když $a \neq -1/3$.
(c) Spočítáme determinant matice, která vznikne z původní nahrazením třetího sloupce sloupcem pravých stran.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 6 & a+5 & 0 & a+1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 6 & a+5 & a+1 \\ a & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 4 & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= -(-4) \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4(3a + 1) \end{aligned}$$

Podle Cramerova pravidla máme

$$z = \frac{4(3a + 1)}{3a + 1} = 4.$$