

Informatika - navazující magisterské studium

Přijímací zkouška z informatiky - 2025 - Zadání - Varianta A

Každá úloha (sekce) je hodnocena maximálně 25 body. V rámci podotázek nejsou body rozděleny rovnoměrně, hodnotí se celkové řešení, větší váhu mají náročnější otázky.

Každý příklad pište na samostatný list, odevzdejte zadání a 4 listy - včetně prázdných.

Všechny své odpovědi zdůvodněte.

1 Kombinatorika

Uvažujme všechna přirozená čísla, jejichž dekadický zápis je pěticiferný a obsahuje právě tři pětky. Určete počet lichých čísel s uvedenou vlastností.

2 Algoritmy

Uvažujme množinu M sestávající ze všech různých binárních vyhledávacích stromů, které jsou tvořeny právě sedmi vrcholy s hodnotami 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77.

- Určete, kolik prvků množiny M má hloubku 2.
- Určete, pro kolik prvků množiny M platí, že hloubka levého podstromu kořene je rovna hloubce pravého podstromu kořene.

Pozn.: Hloubka stromu je délka nejdelší cesty z kořene do listu. Tak např. strom obsahující právě dva vrcholy má vždy hloubku 1.

3 Logika

Tři pravdomluvní vývojáři si navzájem zrevidovali kód.

- Alice říká: “Můj kód nebo Bobův kód je bezchybný.” (A)
- Bob říká: “Jestli Charlieho kód neobsahuje chybu, můj také ne.” (B)
- Charlie říká: “Můj kód je bezchybný ale u Alice jsem chybu našel.” (C)

Firemní tester Dave tvrdí, že:

- “Kódy Boba a Charlieho jsou buď oba bezchybné, nebo oba chybné.” (D)

Vášim úkolem bude rozhodnout, zda z tvrzení Alice, Boba a Charlieho vyplývá také platnost tvrzení Davea. Postup řešení:

- Tvrzení (A), (B), (C) a (D) vyjádřete formulemi výrokové logiky v jazyce $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, kde prvovýroky a, b, c reprezentují, že “Kód Alice/Boba/Charlieho je bezchybný”.
- Některou dokazovací metodou (tablo, rezoluce, Hilbertovský kalkul) rozhodněte, zda (D) je logickým důsledkem (A), (B) a (C).

4 Automaty

Součet dvou binárních čísel $00110 + 01101$ je číslo 10011 , v tabulce zapsané:
$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ + \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$
, rozřezané

na sloupce $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Možné sloupce vnímáme jako abecedu $\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Do jazyka L nad abecedou Σ patří všechny řetězce, kde je spodní řádek součtem řádků nad ním. Prázdný řetězec do jazyka také zařadíme, čísla mohou začínat libovolným počtem nul.

Například do jazyka patří $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, nepatří $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ani $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Sestrojte automat vhodného typu (buď konečný automat, nebo zásobníkový automat, nebo Turingův stroj) přijímající tento jazyk. V případě, že se vám nepodaří sestrojit výše uvedený automat, sestrojte alespoň automat rozpoznávající jazyk, kde sčítáme po složkách modulo 2, bez přenosu bitů. Takové řešení bude ohodnoceno částečným počtem bodů.

Informatika - navazující magisterské studium

Přijímací zkouška z informatiky - 2025 - Řešení - Varianta A

Každá úloha (sekce) je hodnocena maximálně 25 body. V rámci podotázek nejsou body rozděleny rovnoměrně, hodnotí se celkové řešení, větší váhu mají náročnější otázky.

Každý příklad pište na samostatný list, odevzdejte zadání a 4 listy - včetně prázdných.

Všechny své odpovědi zdůvodněte.

1 Kombinatorika

Uvažujeme všechna přirozená čísla, jejichž dekadický zápis je pěticiferný a obsahuje právě tři pětky. Určete počet lichých čísel s uvedenou vlastností.

Řešení

Z požadavku pěti cifer vyplývá, že všechna uvažovaná čísla jsou větší než 10000 a menší než 99999. Z požadavku lichosti vyplývá, že poslední cifra musí být lichá.

Nejprve určíme počet těch, která začínají pětkou a končí rovněž pětkou. Jsou tři možnosti, jak umístit třetí pětku, a 9^2 možností, jak obsadit zbývající dvě cifry.

Dále určíme počet těch, která začínají pětkou a končí jinou lichou cifrou. Jsou tři možnosti, jak umístit zbývající dvě pětky, devět možností, jak přidat třetí cifru doprostřed, a čtyři možnosti, jak obsadit poslední lichou cifru.

Dále určíme počet těch, která končí pětkou a začínají jinou nenulovou cifrou. Pro první cifru existuje osm možností. Potom jsou tři možnosti, jak umístit zbývající dvě pětky a devět možností, jak přidat třetí cifru doprostřed.

Všechna zbývající uvažovaná čísla nezačínají ani nekončí pětkou a těch je $8 \cdot 4$.

Celkový počet uvažovaných čísel je tedy $3 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 \cdot 4 + 8 \cdot 3 \cdot 9 + 8 \cdot 4 = 599$.

2 Algoritmy

Uvažujeme množinu M sestávající ze všech různých binárních vyhledávacích stromů, které jsou tvořeny právě sedmi vrcholy s hodnotami 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77.

- Určete, kolik prvků množiny M má hloubku 2.
- Určete, pro kolik prvků množiny M platí, že hloubka levého podstromu kořene je rovna hloubce pravého podstromu kořene.

Pozn.: Hloubka stromu je délka nejdelší cesty z kořene do listu. Tak např. strom obsahující právě dva vrcholy má vždy hloubku 1.

Řešení

- Má-li mít prvek množiny M hloubku 2, pak v jeho kořeni musí být hodnota 44. V opačném případě by levý nebo pravý podstrom kořene musel obsahovat více než tři prvky a tudíž by musel mít hloubku alespoň 2. Celý strom by tudíž nemohl mít hloubku 2.

Jestliže má prvek množiny M v kořeni hodnotu 44 a má hloubku 2, pak levý podstrom kořene musí mít ve svém kořeni hodnotu 22 a je jednoznačně určen. Podobné platí o pravém podstromu kořene, který je rovněž jednoznačně určen.

Existuje tudíž pouze jediný prvek množiny M s hloubkou 2.

- Má-li mít prvek množiny M levý a pravý podstrom kořene o stejné hloubce, pak v jeho kořeni musí být hodnota 44. V opačném případě by jeden z podstromů kořene musel obsahovat nejvýše 2 vrcholy a druhý z podstromů kořene by musel obsahovat nejméně 4 vrcholy. Pak by ale uvedené podstromy nemohly mít stejnou hloubku.

Jestliže má prvek množiny M v kořeni hodnotu 44, pak levý i pravý podstrom kořene obsahují právě 3 prvky a mohou mít hloubku 1, anebo 2.

Při hloubce podstromů 1 je celý strom jednoznačně určen, viz a).

Při hloubce podstromů 2 existují právě 4 možnosti, jak může vypadat levý podstrom – buď je v jeho kořeni hodnota 33 a v listu 11, nebo 22, anebo je v jeho kořeni 11 a v listu 33, nebo 22. Podobné platí, že existují právě 4 možnosti, jak může vypadat pravý podstrom. Celkem tedy existují 4×4 prvky množiny M s kořenem 44 a hloubkou levého i pravého podstromu 2.

Závěr: Existuje právě $1 + 16 = 17$ prvků množiny M s uvedenou vlastností.

3 Logika

Tři pravdomluvní vývojáři si navzájem zrevidovali kód.

- Alice říká: “Můj kód nebo Bobův kód je bezchybný.” (A)
- Bob říká: “Jestli Charlieho kód neobsahuje chybu, můj také ne.” (B)
- Charlie říká: “Můj kód je bezchybný ale u Alice jsem chybu našel.” (C)

Firemní tester Dave tvrdí, že:

- “Kódy Boba a Charlieho jsou buď oba bezchybné, nebo oba chybné.” (D)

Vášim úkolem bude rozhodnout, zda z tvrzení Alice, Boba a Charlieho vyplývá také platnost tvrzení Davea. Postup řešení:

- Tvrzení (A), (B), (C) a (D) vyjádřete formulemi výrokové logiky v jazyce $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, kde prvovýroky a, b, c reprezentují, že “Kód Alice/Boba/Charlieho je bezchybný”.
- Některou dokazovací metodou (tablo, rezoluce, Hilbertovský kalkul) rozhodněte, zda (D) je logickým důsledkem (A), (B) a (C).

Řešení

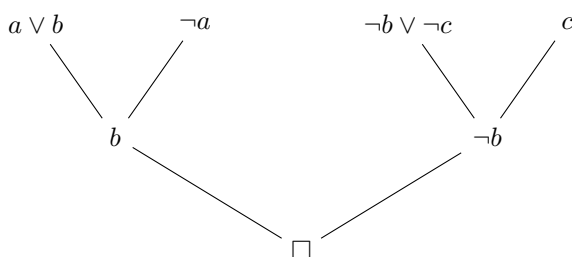
Správné řešení sestává z výrokových formulí a důkazu v některé z dokazovacích metod, zde uvádíme rezoluci.

3a) Výrokové formule

- (A) $a \vee b$
- (B) $c \rightarrow b$
- (C) $c \wedge \neg a$
- (D) $(b \wedge c) \vee (\neg b \wedge \neg c)$

3b) Rezoluce

- Výroky (A), (B), (C) a negaci výroku (D) převedeme na klauzule: $a \vee b$, $b \vee \neg c$, $\neg a$, c , $b \vee c$, $\neg b \vee \neg c$.
- Jedno z možných rezolučních odvození je vyjádřeno stromem níže.



4 Automaty

Součet dvou binárních čísel $00110 + 01101$ je číslo 10011 , v tabulce zapsané:
$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ + \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$
, rozřezané

na sloupce $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Možné sloupce vnímáme jako abecedu $\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Do jazyka L nad abecedou Σ patří všechny řetězce, kde je spodní řádek součtem řádků nad ním. Prázdný řetězec do jazyka také zařadíme, čísla mohou začínat libovolným počtem nul.

Například do jazyka patří $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, nepatří $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ani $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Sestrojte automat vhodného

typu (buď konečný automat, nebo zásobníkový automat, nebo Turingův stroj) přijímající tento jazyk.

V případě, že se vám nepodaří sestrojit výše uvedený automat, sestrojte alespoň automat rozpoznávající jazyk, kde sčítáme po složkách modulo 2, bez přenosu bitů. Takové řešení bude ohodnoceno částečným počtem bodů.

Řešení

Ač zadání vypadá složité, řešením je konečný automat $(\{q_0, q_1\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_0\})$ s přechodovou funkcí δ na obrázku.

