

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)

Mějme

$$f(x, y, z) = x^2y + 2xy^2 + 3xyz + 4xy - z^2 - 8z.$$

- (a) Určete D_f (definiční obor funkce f).
- (b) Nalezněte body, kde $\nabla f(x, y, z) = [0, 0, 0]$.
- (c) Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f na D_f .

Jednotlivé kroky řádně zdůvodněte.

Úloha 2 (25 bodů)

Spočítejte $\int_M 2z$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 + x^2, x + y < 1, y > 0, x > 0\}$.

Úloha 3 (25 bodů)

Nechť náhodný vektor $N = (N_1, N_2, N_3)$ má multinomické rozdělení s celkovým počtem pozorování $N_1 + N_2 + N_3 = n$ a s pravděpodobnostmi $\pi = (\frac{1}{4} + \frac{\theta}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\theta}{4}, \frac{1}{2})$, kde $\theta \in (-1, 1)$ je neznámý parametr.

- (a) Spočítejte maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ .
- (b) Určete asymptotické rozdělení odhadu $\hat{\theta}_n$.
- (c) Navrhněte nestranný odhad parametru θ založený na N_1 a spočítejte jeho asymptotické rozdělení. Ukažte, že jeho asymptotický rozptyl je větší než asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu.
- (d) Sestavte testovou statistiku Raova skórového testu hypotézy $H_0 : \theta = \theta_0$ proti alternativě $H_1 : \theta \neq \theta_0$ a určete kritický obor tohoto testu ve speciálním případě $\theta_0 = 0$.

Úloha 4 (25 bodů)

Uvažujte roční **předhlátní** důchod (anuita) o velikosti C (tj. pravidelná platba ve výši C na začátku každého roku) vyplácený po dobu N let. Dále uvažujte nominální roční úrokovou míru $i > 0$.

- (a) Vyjádřete současnou hodnotu (PV_a) tohoto důchodu jako součet diskontovaných plateb a to pomocí diskontního faktoru $v = \frac{1}{1+i}$. Tuto současnou hodnotu dále upravte na explicitní tvar s použitím součtového vzorce.
- (b) Určete střední (očekávanou) hodnotu současné hodnoty důchodu z kroku (a), budete-li předpokládat, že počet plateb má diskrétní rozdělení s pravděpodobnostmi

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- (c) Zapište vztah pro současnou hodnotu (PV_p) odpovídající perpetuity (tj. nyní uvažujte $N = \infty$).
- (d) Dále předpokládejte, že roční úroková míra i je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 1)$. Vyjádřete 5 % VaR (Value at Risk, hodnota v riziku) pro perpetuitu z kroku (c), tj. najděte takovou hodnotu, pod kterou klesne PV_p jen s pravděpodobností 5%. Vyhodnoťte tuto 5% VaR pro $C = 100$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

Varianta A – Řešení

Úloha 1 (25 bodů)

(a) Funkce f je polynom a je tedy definována a je třídy C^2 na celém $\mathbb{R}^3$.

(b) Řešíme rovnici $\nabla f(x, y, z) = [0, 0, 0]$. Tedy

$$y(2x + 2y + 3z + 4) = 0 \Rightarrow (y = 0 \vee 2x + 2y + 3z = -4), \quad (1)$$

$$x(x + 4y + 3z + 4) = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee x + 4y + 3z = -4), \quad (2)$$

$$3xy - 2z - 8 = 0. \quad (3)$$

Podle toho, zda x, y jsou či nejsou rovny 0, mohou nastat následující 4 možnosti:

$x = y = 0$: Z (3) plyne, že $z = -4$. Získáme tedy bod $A = [0, 0, -4]$.

$x = 0, y \neq 0$: Z (3) plyne, že $z = -4$. Z (1) pak plyne, že $y = 4$. Získáme tedy bod $B = [0, 4, -4]$.

$y = 0, x \neq 0$: Z (3) plyne, že $z = -4$. Z (2) pak plyne, že $x = 8$. Získáme tedy bod $C = [8, 0, -4]$.

$x, y \neq 0$: Z (1) a (2) obdržíme soustavu

$$2x + 2y + 3z = -4,$$

$$x + 4y + 3z = -4.$$

Pak $x = -\frac{4}{3} - z$ a $y = -\frac{2}{3} - \frac{z}{2}$. Z (3) obdržíme

$$\frac{3}{2}z^2 + 2z - \frac{16}{3} = 0.$$

Pak $z \in \{\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\}$ a získáme tedy body $D = [-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$ a $E = [\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{8}{3}]$.

(c) Nejprve spočítáme matici druhých derivací

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 4y + 3z + 4 & 3y \\ 2x + 4y + 3z + 4 & 4x & 3x \\ 3y & 3x & -2 \end{pmatrix}.$$

Postupně budeme do $\nabla^2 f(x, y, z)$ dosazovat body A, B, C, D, E a z definitnosti příslušných matic pak určovat zda se jedná o lokální maxima, minima, či sedlové body. Ze Sylvestrova kritéria plyne, že k indefinitnosti matice stačí, aby byl alespoň jeden prvek na diagonále kladný a jeden záporný a nebo aby existovala submatice typu 2×2 se záporným determinantem, jež vznikne z původní matice vyjmutím stejného řádku jako sloupce.

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matice je indefinitní neb $\begin{vmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0$, bod A je tedy sedlovým bodem.

$$\nabla^2 f(B) = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 12 \\ 8 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matice je tedy indefinitní a bod B je sedlovým bodem.

$$\nabla^2 f(C) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & 32 & 24 \\ 0 & 24 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matice je tedy indefinitní a bod C je sedlovým bodem.

$$\nabla^2 f(D) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{8}{3} & -4 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{32}{3} & -8 \\ -4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matice je indefinitní neb $\begin{vmatrix} -\frac{8}{3} & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{32}{3} < 0$, bod D je tedy sedlovým bodem.

$$\nabla^2 f(E) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ \frac{4}{3} & \frac{16}{3} & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matice je tedy indefinitní a bod E je sedlovým bodem. Funkce f tedy nemá žádný lokální extrém.

Úloha 2 (25 bodů)

Všimněme si, že $1 + x^2 > 0$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ a tedy projekce M ve směru osy z má tvar

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0, y > 0, x + y < 1\}.$$

Pokud má platit $0 < y < 1 - x$ potom $x < 1$, tedy

$$\begin{aligned} \int_M 2z &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1+x^2} 2z \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} [z^2]_{z=0}^{z=1+x^2} \, dy \, dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+x^2)^2 \, dy \, dx = \int_0^1 [y(1+x^2)^2]_{y=0}^{y=1-x} \, dx = \\ &= \int_0^1 (1-x)(1+x^2)^2 \, dx = \int_0^1 1 - x + 2x^2 - 2x^3 + x^4 - x^5 \, dx = \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

Úloha 3 (25 bodů)

(a) Sdružená hustota pozorování N je

$$f(n_1, n_2, n_3) = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3!} \left(\frac{1+\theta}{4} \right)^{n_1} \left(\frac{1-\theta}{4} \right)^{n_2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n_3},$$

pokud $n_1 + n_2 + n_3 = n$; jinak je rovna nule. Věrohodnostní funkce pro parametr θ je

$$L(\theta) = C \left(\frac{1+\theta}{4} \right)^{N_1} \left(\frac{1-\theta}{4} \right)^{N_2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N_1-N_2},$$

kde $C > 0$ je normalizační konstanta. Logaritmická věrohodnost je

$$\ell(\theta) = N_1 \log\left(\frac{1+\theta}{4}\right) + N_2 \log\left(\frac{1-\theta}{4}\right) + (n - N_1 - N_2) \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log C.$$

Věrohodnost je až na konstantu stejná, jako kdybychom pozorovali n nezávislých stejně rozdělených vektorů $N_i = (N_{i1}, N_{i2}, N_{i3})$ s rozdělením $\text{Mult}_3(1, \pi)$, přičemž $N = \sum_{i=1}^n N_i$. Skórová statistika je

$$U(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{N_1}{4} \cdot \frac{4}{1+\theta} - \frac{N_2}{4} \cdot \frac{4}{1-\theta} = \frac{1}{1-\theta^2} [N_1 - N_2 - \theta(N_1 + N_2)].$$

Rovnice $U(\hat{\theta}) = 0$ má právě jedno řešení $\hat{\theta}_n = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$ a to je maximálně věrohodný odhad parametru θ .

(b) Skórová funkce (pro i -té z n pozorování) je

$$U_i(\theta) = \frac{1}{1-\theta^2} [N_{i1} - N_{i2} - \theta(N_{i1} + N_{i2})].$$

Platí $U(\theta) = \sum_{i=1}^n U_i(\theta)$, což je součet nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Snadno ověříme

$$EU_i(\theta) = EN_{i1} \frac{1}{1+\theta} - EN_{i2} \frac{1}{1-\theta} = 0.$$

Dále

$$\frac{\partial U_i(\theta)}{\partial \theta} = \frac{2\theta}{(1-\theta^2)^2} [N_{i1} - N_{i2} - \theta(N_{i1} + N_{i2})] - \frac{1}{1-\theta^2} (N_{i1} + N_{i2}),$$

kde hranatá závorka má nulovou střední hodnotu. Nyní můžeme spočítat Fisherovu informaci

$$I(\theta) = -E \frac{\partial U_i(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{1-\theta^2} \left(\frac{1+\theta}{4} + \frac{1-\theta}{4} \right) = \frac{1}{2(1-\theta^2)}.$$

Jelikož obecně platí $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, I^{-1}(\theta))$, dostáváme

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, 2(1-\theta^2)).$$

(c) Jelikož

$$EN_1 = n(1+\theta)/4,$$

nestranným odhadem θ založeným na N_1 je $\tilde{\theta}_n = 4N_1/n - 1$. Podle centrální limitní věty

$$\sqrt{n} \left(\frac{N_1}{n} - \frac{1+\theta}{4} \right) \xrightarrow{d} N \left(0, \frac{1+\theta}{4} \left(1 - \frac{1+\theta}{4} \right) \right),$$

a proto $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$, kde

$$\sigma^2 = 4(1+\theta) \left(1 - \frac{1+\theta}{4} \right) = 4(1+\theta) - (1+\theta)^2 = 3 + 2\theta - \theta^2.$$

Nerovnost $3 + 2\theta - \theta^2 > 2(1-\theta^2)$ lze přepsat ve tvaru $\theta^2 + 2\theta + 1 > 0$, což platí pro všechny $\theta \in (-1, 1)$.

(d) Platí-li nulová hypotéza $H_0 : \theta = \theta_0$, máme

$$\frac{1}{\sqrt{n}} U(\theta_0) \xrightarrow{d} N(0, I(\theta_0)) \quad \text{a proto} \quad \frac{1}{\sqrt{n I(\theta_0)}} U(\theta_0) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Dosadíme-li za $U(\theta_0)$ a $I(\theta_0)$, dostaneme Raovu testovou statistiku

$$\begin{aligned} R_n &= \sqrt{\frac{2(1-\theta_0^2)}{n}} \frac{1}{1-\theta_0^2} [N_1 - N_2 - \theta_0(N_1 + N_2)] \\ &= \sqrt{\frac{2}{n(1-\theta_0^2)}} [N_1 - N_2 - \theta_0(N_1 + N_2)]. \end{aligned}$$

Pro $\theta_0 = 0$ budeme zamítat hypotézu na hladině α , pokud

$$\sqrt{\frac{2}{n}} |N_1 - N_2| > u_{1-\alpha/2},$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ je $(1-\alpha/2)$ -kvantil normovaného normálního rozdělení.

Úloha 4 (25 bodů)

(a)

$$PV_a = \sum_{n=0}^{N-1} C v^n = C \frac{1-v^N}{1-v}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(PV_a) &= \mathbb{E}\left(C \frac{1-v^N}{1-v}\right) = \frac{C}{1-v} (1 - \mathbb{E}v^N) = \frac{C}{1-v} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} v^n \frac{1}{2^n}\right) = \\ &= \frac{C}{1-v} \left(1 - \frac{v}{2-v}\right) = \frac{2C}{2-v}. \end{aligned}$$

Využili jsme: $v = \frac{1}{1+i} \in (0, 1)$.

(c) Díky tomu, že $v = \frac{1}{1+i} \in (0, 1)$, máme:

$$PV_p = \lim_{N \rightarrow \infty} C \frac{1-v^N}{1-v} = C \frac{1}{1-v} = C \left(\frac{1}{i} + 1\right).$$

(d) Hledáme VaR tak, aby

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[PV_p \leq \text{VaR}] &= 0.05 \\ \mathbb{P}\left[C \left(\frac{1}{i} + 1\right) \leq \text{VaR}\right] &= 0.05 \\ \mathbb{P}\left[i \geq \frac{1}{\text{VaR}/C - 1}\right] &= 0.05. \end{aligned}$$

Jelikož $i \sim R(0, 1)$, dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{VaR}/C - 1} &= 0.95 \\ \text{VaR} &= \left(\frac{1}{0.95} + 1\right) C. \end{aligned}$$

Pro $C = 100$ tedy

$$\text{VaR} = \frac{195}{0.95} \doteq 205.26.$$