

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2025
Oblast vzdělávání Fyzika, kromě Učitelství fyziky pro střední školy se sdruženým
studiem Učitelství matematiky pro střední školy (FMUPN), Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Velikost zrychlení hmotného bodu při jeho přímočarém pohybu rovnoměrně klesne během času $T=20$ s z počáteční hodnoty $a_0=10 \text{ m/s}^2$ na 0. Bod byl v čase $t=0$ s v klidu.

a) Jakou rychlost má hmotný bod v čase $T=20$ s ?

b) Jakou dráhu bod urazil?

Příklad 2 (25 bodů)

Elementární dipól s dipólovým momentem $\vec{p} = (0, 0, p_z)$ je vložen do homogenního

elektrického pole, jehož elektrická intenzita $\vec{E}$ je také rovnoběžná s osou z : $\vec{E} = (0, 0, E_z)$.

a) Výpočtem dokažte, že ekvipotenciální plocha s nulovým potenciálem pro toto uspořádání je kulová plocha. Určete její poloměr a a polohu středu S . Potenciál elementárního

elektrického dipólu je dán výrazem $\varphi_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$.

b) Do této ekvipotenciální plochy vložíme vodivou kulovou plochu se stejným poloměrem a , kterou budeme udržovat na nulovém potenciálu. Spočítejte plošnou hustotu náboje na této vodivé ploše.

Příklad 3 (25 bodů)

Čtvercová optická mřížka na průchod o velikosti $a = 12,5 \text{ mm}$ je tvořena štěrbinami širokými $b = 10 \text{ }\mu\text{m}$ a vzdálenými od sebe $d = 25 \text{ }\mu\text{m}$ (vzdálenost mezi středy štěrbin). Na celou mřížku kolmo dopadá rovnoběžný svazek paprsků světla o vlnové délce $\lambda = 500 \text{ nm}$.

a) Pod jakým úhlem θ vzniká interferenční maximum 1. řádu?

b) Jaký nejvyšší řád spektra $k_{\max}$ je teoreticky možné pozorovat?

c) Jaká je teoreticky největší použitelná vlnová délka $\lambda_{\max}$ pro tuto mřížku?

d) Je tato mřížka schopna rozlišit sodíkový dublet ($\lambda_1 = 589,000 \text{ nm}$; $\lambda_2 = 589,589 \text{ nm}$)?

Pokud ano, ve kterém řádu k spektra?

e) Určete všechny řády k_0 ohybových minim, které znemožní pozorování některého z hlavních interferenčních maxim. Jejich řády k určete také.

Řešte numericky kromě bodu a).

Příklad 4 (25 bodů)

Atomy jednotlivých prvků mohou mít svůj magnetický moment v důsledku způsobu obsazení elektronových hladin. Některé mohou v důsledku vnějších podmínek toto obsazení měnit. Pro své výjimečné vlastnosti je jedním z nich prvek vzácných zemin europium (Eu), jehož fyzikální vlastnosti souvisí s obsazením slupky $4f$. Známé elektronové konfigurace slupky $4f$ europia jsou $4f^7$ (Eu^{2+}) a $4f^6$ (Eu^{3+}).

Na základě Hundových pravidel rozhodněte, která z těchto dvou konfigurací dává vznik magnetickému momentu. Velikost tohoto magnetického momentu pak určete (v jednotkách Bohrova magnetonu μ_B).

Příklad 1

Velikost zrychlení hmotného bodu při jeho přímočarém pohybu rovnoměrně klesne během času $T=20$ s z počáteční hodnoty $a_0=10$ m/s² na 0. Bod byl v čase $t=0$ s v klidu.

a) Jakou rychlost má hmotný bod v čase $T=20$ s ?

b) Jakou dráhu bod urazil?

Řešení:

a) Abychom mohli vypočítat rychlost a dráhu, je nutné si nejdříve vyjádřit časovou závislost zrychlení. Dle okrajových podmínek daných zadáním je tato závislost

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = a_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad (7 \text{ bodů})$$

Nyní můžeme vyjádřit předpis pro časovou závislost rychlosti integrací předpisu pro časovou závislost zrychlení. Dostaneme

$$v(t) = \int a(t)dt = a_0 \int \left(1 - \frac{t}{T}\right)dt = a_0 \left(t - \frac{t^2}{2T}\right) + C$$

Konstantu C určíme z okrajové podmínky $v(0) = 0$ m/s a tedy $C = 0$. Výsledný předpis pro rychlost časovou závislost velikosti rychlosti je tedy

$$v(t) = a_0 \left(t - \frac{t^2}{2T}\right) \quad (6 \text{ bodů})$$

Po dosazení za $t = T$ dostaneme

$$v = a_0 \frac{T}{2} = 100 \frac{m}{s} \quad (3 \text{ body})$$

b) Předpis pro časový vývoj dráhy získáme integrací předpisu pro časovou závislost velikosti rychlosti následovně

$$x(t) = \int v(t)dt = a_0 \int \left(t - \frac{t^2}{2T}\right)dt = a_0 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}\right) + C$$

Konstantu C opět určíme z okrajové podmínky, $x(0) = 0$ m a tedy $C = 0$. (6 bodů)

Po dosazení za $t = T$ dostáváme výslednou dráhu

$$x = \frac{1}{3}a_0T^2 = \frac{4000}{3}m \quad (3 \text{ body})$$

Příklad 2

Elementární dipól s dipólovým momentem $\vec{p} = (0, 0, p_z)$ je vložen do homogenního

elektrického pole, jehož elektrická intenzita $\vec{E}$ je také rovnoběžná s osou z : $\vec{E} = (0, 0, E_z)$.

a) Výpočtem dokažte, že ekvipotenciální plocha s nulovým potenciálem pro toto uspořádání je kulová plocha. Určete její poloměr a a polohu středu S . Potenciál elementárního

elektrického dipólu je dán výrazem $\varphi_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$.

b) Do této ekvipotenciální plochy vložíme vodivou kulovou plochu se stejným poloměrem a , kterou budeme udržovat na nulovém potenciálu. Spočítejte plošnou hustotu náboje na této vodivé ploše.

Řešení:

Potenciál elementárního dipólu je zadán, musíme ale ještě spočítat potenciál homogenního elektrického pole φ_h :

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi_h = -\int E_z dz = -E_z z \quad (3 \text{ body})$$

Výsledný potenciál je podle principu superpozice dán součtem obou potenciálů. Nás zajímá oblast, ve které je výsledný potenciál nulový.

$$\varphi = \varphi_d + \varphi_h = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z z}{r^3} - E_z z = 0 \quad (3 \text{ body})$$

S využitím vztahu pro velikost polohového vektoru $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ dostáváme

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{p_z}{E_z 4\pi\epsilon_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4 \text{ body})$$

což je rovnice koule s poloměrem $a = \sqrt[3]{\frac{p_z}{E_z 4\pi\epsilon}}$ a středem v bodě $S=(0,0,0)$ (2 body)

b) Víme, že hustota plošného náboje je rovna rozdílu normálových složek intenzity

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma_z}{\epsilon_0} \quad (4 \text{ body})$$

Intenzita je vždy kolmá k ekvipotenciální ploše. Ekvipotenciální plocha je v našem případě kulová a proto je výhodné převést problém do sférických souřadnic substitucí $z=r \cos \theta$ (viz obr.). Poté stačí spočítat radiální složku intenzity. Potenciál tedy vyjádříme

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z r \cos \theta}{r^3} - E_z r \cos \theta = \frac{p_z \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_z r \cos \theta$$

a radiální komponentu elektrické intenzity spočteme jako

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2p_z \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} + E_z \cos \theta = \frac{2a^3 E_z \cos \theta}{r^3} + E_z \cos \theta \quad (5 \text{ bodů})$$

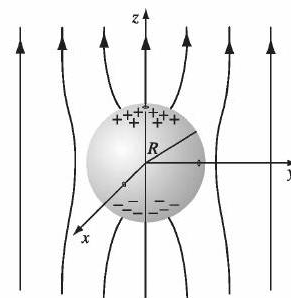
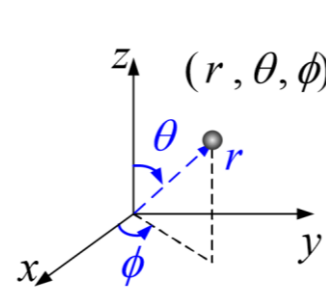
Pro výpočet plošné hustoty potřebujeme znát intenzitu na povrchu koule:

$$E_r(a) = 3E_z \cos \theta \quad (2 \text{ body})$$

Jelikož v materiálu vodivé koule musí být elektrické pole nulové, bude E_{2n} nulová a plošná hustota bude $\sigma = 3\epsilon_0 E_z \cos \theta$ (2 body)

Rozložení plošné hustoty na povrchu koule je znázorněno na obrázku.

Rozložení se nezmění, pokud vložený dipól vyjmeme.



Příklad 3

Čtvercová optická mřížka na průchod o velikosti $a = 12,5$ mm je tvořena štěrbinami širokými $b = 10$ μm a vzdálenými od sebe $d = 25$ μm (vzdálenost mezi středy štěrbin). Na celou mřížku kolmo dopadá rovnoběžný svazek paprsků světla o vlnové délce $\lambda = 500$ nm.

- Pod jakým úhlem θ vzniká interferenční maximum 1. řádu?
 - Jaký nejvyšší řád spektra k_{max} je teoreticky možné pozorovat?
 - Jaká je teoreticky největší použitelná vlnová délka λ_{max} pro tuto mřížku?
 - Je tato mřížka schopna rozlišit sodíkový dublet ($\lambda_1 = 589,000$ nm; $\lambda_2 = 589,589$ nm)? Pokud ano, ve kterém řádu k spektra?
 - Určete všechny řády k_0 ohybových minim, které znemožní pozorování některého z hlavních interferenčních maxim. Jejich řády k určete také.
- Řešte numericky kromě bodu a).

Řešení

- a) Dosazením $k = 1$ do mřížkové rovnice

$$k\lambda = d \sin \theta$$

dostaneme

$$\theta = \arcsin \frac{\lambda}{d} \quad (4 \text{ body})$$

- b) V mřížkové rovnici dosadíme $\theta = 90^\circ$, $\lambda = 500$ nm a obdržíme $k_{\text{max}} = 50$. (4 body)

- c) V mřížkové rovnici položíme $\theta = 90^\circ$, $k = 1$ a dostaneme $\lambda = 25$ μm . (4 body)

- d) Rozlišovací schopnost mřížky je podle Rayleighova kritéria dána

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$$

Dosadíme $\lambda \sim \lambda_1$, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, počet osvětlených štěrbin $N = a/d$ a získáme nejnižší řád spektra $k = 2$. (6 bodů)

- e) Podmínka pro ohybová maxima je

$$k_0\lambda = b \sin \theta$$

Takže po zkombinování s mřížkovou rovnicí dostaneme $k/k_0 = d/b = 5/2$. Výsledkem jsou dvojice k, k_0 : 5, 2; 10, 4; 15, 6;... (7 bodů)

Příklad 4

Atomy jednotlivých prvků mohou mít svůj magnetický moment v důsledku způsobu obsazení elektronových hladin. Některé mohou v důsledku vnějších podmínek toto obsazení měnit. Pro své výjimečné vlastnosti je jedním z nich prvek vzácných zemin europium (Eu), jehož fyzikální vlastnosti souvisí s obsazením slupky $4f$. Znamé elektronové konfigurace slupky $4f$ europia jsou $4f^7$ (Eu^{2+}) a $4f^6$ (Eu^{3+}).

Na základě Hundových pravidel rozhodněte, která z těchto dvou konfigurací dává vznik magnetickému momentu. Velikost tohoto magnetického momentu pak určete (v jednotkách Bohrova magnetonu μ_B).

Řešení:

Nezbytné úvahy:

Magnetický moment vzniká v slupce $4f$. f -slupka má „kapacitu“ **14 elektronů** (2 body)

Magnetický moment $\mu = g J \mu_B$, budeme tedy potřebovat stanovit kvantová čísla S, L, J (pomocí H.P.) (kde g je Landéův faktor, rovněž závisící na S, L, J) (5 bodů)

Hundova pravidla a jejich použití:

* f -slupka = **7 možných hodnot** kvantového čísla m_l (2 body)

$m_l = 3$	2	1	0	-1	-2	-3

* každý elektron má své **spinové** kvantové číslo $m_s \in \{ -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \}$ (1 bod)

* Hundova pravidla:

1) Při splnění **Pauliho vylučovacího principu** (nemohou koexistovat dva elektrony se stejnou „sadou“ kvantových čísel – alespoň v jednom se musí lišit) dochází k obsazení tak, aby bylo dosaženo **maximálního celkového spinového momentu** $S = \sum_i m_{s_i}$:

$4f^6 (\text{Eu}^{3+})$

↑	↑	↑	↑	↑	↑	
---	---	---	---	---	---	--

$$S = \sum_i m_{s_i} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

↑ $m_s = \frac{1}{2}$

↓ $m_s = -\frac{1}{2}$

$4f^7 (\text{Eu}^{2+})$

↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
---	---	---	---	---	---	---

$$S = \sum_i m_{s_i} = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

(1+2 body)

2) Při současném splnění 1.H.P. jsou hladiny obsazeny tak, že je dosaženo **maximálního celkového orbitálního momentu** $L = \sum_i m_{l_i}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 m_l = 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$L = \sum_i m_{l_i}$$

$$= 3 + 2 + 1 + 0 + (-1) + (-2) = 3$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 m_l = 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 \hline
 \end{array}$$

$$L = \sum_i m_{l_i}$$

$$= 3 + 2 + 1 + 0 + (-1) + (-2) + (-3) = 0$$

(2 body)

3) Je-li slupka zaplněna **méně než z poloviny**, pak celkový moment hybnosti

$$J = |S - L| = 0$$

(tj. NEMÁ MAGNETICKÝ MOMENT)

$$J = |S - L| = \frac{7}{2}$$

(2 body)

Zde je jasné, že konfigurace $4f^6$ (Eu^{3+}) nebude mít magnetický moment

(2 body)

Dále se budeme věnovat pouze magnetickému stavu $4f^6$ (Eu^{2+})

* uvedených znalostí využijeme k vypočtení $g(\text{SLJ}) = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$

(4 body)

$$\dots = 1 + \frac{\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{7}{2} + 1\right) + \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{7}{2} + 1\right)}{2 \cdot \left(\frac{7}{2} + 1\right)} = 1 + 1 = 2$$

(1 bod)

* a následně k určení magnetického momentu $\mu = gJ \mu_B = 2 \cdot \frac{7}{2} \mu_B = 7 \mu_B$

(1 bod)

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2025
Oblast vzdělávání Fyzika, kromě Učitelství fyziky pro střední školy se sdruženým
studiem Učitelství matematiky pro střední školy (FMUPN), Varianta B

Příklad 1 (25 bodů)

Těleso se pohybuje tak, že jeho polohu v čase popisují funkce souřadnic

$$x(t) = \frac{1}{3}ct^3 - 2a_0t^2 + 3v_0t,$$
$$y(t) = d,$$
$$z(t) = b,$$

Kde c , v_0 , a_0 , d , b jsou konstanty. Určete:

- Jednotky $[c]$, $[v_0]$, $[a_0]$, $[d]$, $[b]$.
- Časový průběh rychlosti a zrychlení ve složkách.
- Trajektorii pohybu.
- Čas, ve kterém se změni směr rychlosti na opačný.

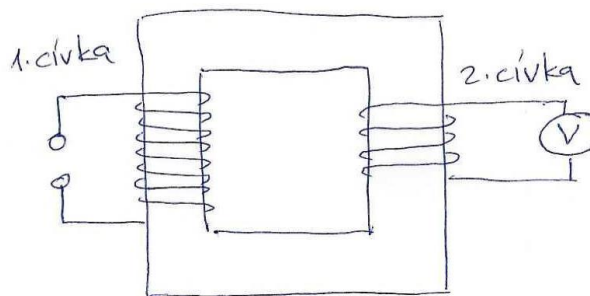
Příklad 2 (25 bodů)

Dvě cívky jsou navinuty na společném jádře.

1. cívka má N_1 závitů a je připojena ke zdroji stejnosměrného proudu, jehož velikost s časem vzrůstá jako $I_1 = k \cdot t$, kde k je konstanta s rozměrem A/s.

2. cívka má N_2 závitů a je připojena na voltmetr, který ukazuje napětí o velikosti U_2 . Spočítejte a pomocí zadaných veličin vyjádřete

- jaké napětí U_1 se indukuje na 1. cívkce;
- jaká je velikost vzájemné indukčnosti cívek?
- Jaký magnetický tok Φ poteče 1. cívkou, pokud ji odpojíme od zdroje proudu, a naopak ke zdroji proudu, tentokrát konstantního o velikosti I_2 , připojíme 2. cívku?



Příklad 3 (25 bodů)

Obraz předmětu zobrazovaného dutým kulovým zrcadlem je skutečný a třikrát zvětšený.

Poloměr křivosti zrcadla je $|R| = 60$ cm.

- Najděte polohu předmětu i jeho obrazu. Leží obraz před zrcadlem nebo za ním? Je vzpřímený nebo převrácený?
- Řešte tutéž úlohu pro případ neskutečného obrazu se stejnou velikostí zvětšení. Řešte numericky.

Příklad 4 (25 bodů)

Student Matěj působí na intermetalický materiál EuRu_2P_2 vnějším tlakem, aby změnil jeho krystalovou mříž. EuRu_2P_2 tvoří tetragonální krystalovou strukturu s mřížovými parametry $a_0 = 4,00$ Å a $c_0 = 10,9$ Å (za normálního tlaku). Při působení hydrostatickým tlakem $p = 5$ GPa tyto parametry dosáhnou hodnot $a_{5\text{GPa}} = 4,00$ Å a $c_{5\text{GPa}} = 9,9$ Å. V jedné elementární buňce EuRu_2P_2 se vyskytují tři strukturální jednotky.

- Pomozte Matějovi určit modul objemové pružnosti B_V (modul objemové pružnosti je převrácená hodnota stlačitelnosti k_V : $\frac{1}{k_V} = B_V = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V}$), kde V_0 je objem před změnou.
- O kolik procent se změni hustota EuRu_2P_2 v důsledku aplikace tlaku 5 GPa?
- Spočítejte rovněž změnu hustoty ρ (0 GPa) - ρ (5 GPa).

Při numerickém řešení je možné ve výsledném vztahu vhodně zaokrouhlit.

Užitečné konstanty: Ar (Eu) = 152; Ar (Ru) = 101; Ar (P) = 31; $m_u = 1.6 \cdot 10^{-27}$ kg

Příklad 1

Těleso se pohybuje tak, že jeho polohu v čase popisují funkce souřadnic

$$x(t) = \frac{1}{3}ct^3 - 2a_0t^2 + 3v_0t,$$
$$y(t) = d,$$
$$z(t) = b,$$

Kde c, v_0, a_0, d, b jsou konstanty. Určete:

- Jednotky $[c], [v_0], [a_0], [d], [b]$.
- Časový průběh rychlosti a zrychlení ve složkách.
- Trajektorii pohybu.
- Čas, ve kterém se změní směr rychlosti na opačný.

Řešení:

a) Jelikož se souřadnice (levé strany rovnic) vyjadřují v metrech, dostáváme

$$[c] = \text{m/s}^3$$

$$[a_0] = \text{m/s}^2$$

$$[v_0] = \text{m/s}$$

$$[d] = \text{m}$$

$$[b] = \text{m}$$

(5 bodů)

b) Časový průběh rychlosti ve složkách dostaneme derivací funkcí polohy podle času

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = ct^2 - 4a_0t + 3v_0$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 0$$

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} = 0$$

Časový průběh zrychlení ve složkách dostaneme derivací funkcí rychlosti podle času

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = 2ct - 4a_0$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = 0$$

$$a_z(t) = \frac{dv_z}{dt} = 0$$

(8 bodů)

c) Vzhledem k tomu, že souřadnice y a z nejsou funkcemi času a jsou po celou dobu pohybu konstantní, je trajektorií **přímka**.

(5 bodů)

d) Směr vektoru rychlosti se změní v čase, kde je jeho hodnota právě nulová. To nastane pokud

$$0 = v_x = ct^2 - 4a_0t + 3v_0$$

Řešení této kvadratické rovnice pro t dává dvě hodnoty $t_1 = 2,55\text{s}$ a $t_2 = 0,78\text{s}$.

(7 bodů)

Příklad 2

Dvě cívky jsou navinuty na společném jádře.

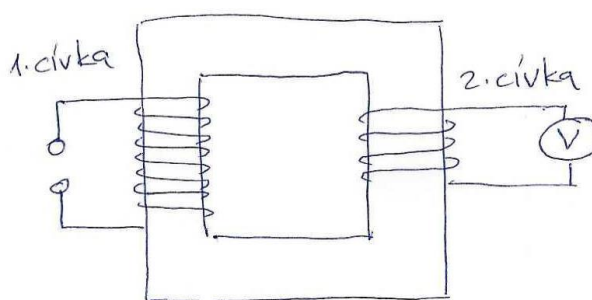
1. cívka má N_1 závitů a je připojena ke zdroji stejnosměrného proudu, jehož velikost s časem vzrůstá jako $I_1 = k \cdot t$, kde k je konstanta s rozměrem A/s.

2. cívka má N_2 závitů a je připojena na voltmetr, který ukazuje napětí o velikosti U_2 . Spočítejte a pomocí zadaných veličin vyjádřete

a) jaké napětí U_1 se indukuje na 1. cívkce;

b) jaká je velikost vzájemné indukčnosti cívek?

c) Jaký magnetický tok Φ poteče 1. cívkou, pokud ji odpojíme od zdroje proudu, a naopak ke zdroji proudu, tentokrát konstantního o velikosti I_2 , připojíme 2. cívku?



Řešení:

a) Magnetický tok Φ je buzen pouze proudem I_1 a v obou cívkách bude stejný. Napětí indukované časovou změnou proudu bude proto podle Faradayova zákona stejné v každém závitě a pro každou cívku pak úměrné počtu závitů:

$$U_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad U_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (6 \text{ bodů})$$

Můžeme tedy i bez znalosti magnetického toku Φ spočítat napětí U_1 jako

$$U_1 = U_2 \frac{N_1}{N_2} \quad (2 \text{ body})$$

b) Pokud by oběma cívkami tekla proud, magnetický tok druhou cívkou by byl

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

kde L_2 je vlastní indukčnost 2. cívky a M je hledaná vzájemná indukčnost. Protože proud teče pouze první cívkou, magnetický tok druhou cívkou je dán výrazem $\Phi_2 = \Phi = M I_1$ (3 body)

Tok Φ stále neznáme a tentokrát ho musíme vyjádřit pomocí zadaných veličin. To lze např.

pomocí Faradayova zákona: $U_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$ (3 body)

Protože máme spočítat velikost vzájemné indukčnosti, stačí spočítat její absolutní velikost:

$$|M| = U_2 / \frac{dI_1}{dt} = \frac{U_2}{k} \quad (3 \text{ body})$$

c) Magnetický tok bude v tomto případě buzen pouze proudem I_2 a z důvodů zmíněných v části b) bude tentokrát $\Phi_1 = M I_2$. Vzájemná indukčnost je totiž stejná jako v případě b):

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (4 \text{ body})$$

Magnetický tok bude opět stejný v obou cívkách, ale jiný než v případě a) a b). Můžeme ho proto označit např. $\Phi_1 = \Phi'$ a vyjádřit pomocí vzájemné indukčnosti spočtené v části b) a zadaného proudu I_2 :

$$\Phi' = \frac{U_2 I_2}{k} \quad (4 \text{ body})$$

Příklad 3

Obraz předmětu zobrazovaného dutým kulovým zrcadlem je skutečný a třikrát zvětšený.

Poloměr křivosti zrcadla je $|R| = 60$ cm.

a) Najděte polohu předmětu i jeho obrazu. Leží obraz před zrcadlem nebo za ním? Je vzpřímený nebo převrácený?

b) Řešte tutéž úlohu pro případ neskutečného obrazu se stejnou velikostí zvětšení.

Řešte numericky.

Řešení

Pro zvětšení zrcadla platí

$$m = -\frac{s'}{s}$$

a pro zobrazení zrcadlem

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

Zkombinováním dostaneme

$$s = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right)$$

$$s' = -ms \quad (15 \text{ bodů})$$

a) Skutečný obraz leží před zrcadlem a je převrácený, tj. zvětšení $m = -3$.

(2 bodů)

Po dosazení $R = -60$ cm dostaneme $s = -40$ cm a $s' = -120$ cm.

(3 bodů)

b) Neskutečný obraz leží za zrcadlem a je vzpřímený, tj. zvětšení $m = 3$.

(2 bodů)

Po dosazení $R = -60$ cm dostaneme $s = -20$ cm a $s' = 60$ cm.

(3 bodů)

Pozn. Znaménka ve vzorcích a u dosazovaných hodnot se mohou lišit při užití jiné konvence.

Příklad 4

Student Matěj působí na intermetalický materiál EuRu_2P_2 vnějším tlakem, aby změnil jeho krystalovou mříž. EuRu_2P_2 tvoří tetragonální krystalovou strukturu s mřížovými parametry $a_0 = 4,00 \text{ \AA}$ a $c_0 = 10,9 \text{ \AA}$ (za normálního tlaku). Při působení hydrostatickým tlakem $p = 5 \text{ GPa}$ tyto parametry dosáhnou hodnot $a_{5\text{GPa}} = 4,00 \text{ \AA}$ a $c_{5\text{GPa}} = 9,9 \text{ \AA}$. V jedné elementární buňce EuRu_2P_2 se vyskytují tři strukturní jednotky.

a) Pomozte Matějovi určit modul objemové pružnosti B_V (modul objemové pružnosti je převrácená hodnota stlačitelnosti $k_V : \frac{1}{k_V} = B_V = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V}$), kde V_0 je objem před změnou.

b) O kolik procent se změní hustota EuRu_2P_2 v důsledku aplikace tlaku 5 GPa?

c) Spočtete rovněž změnu hustoty $\rho(0 \text{ GPa}) - \rho(5 \text{ GPa})$.

Při numerickém řešení je možné ve výsledném vztahu vhodně zaokrouhlit.

Užitečné konstanty: $A_r(\text{Eu}) = 152$; $A_r(\text{Ru}) = 101$; $A_r(\text{P}) = 31$; $m_u = 1.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Řešení:

Znamé hodnoty:

$$a_0 = 4,00 \text{ \AA}$$

$$c_0 = 10,9 \text{ \AA}$$

$$a_{5\text{GPa}} = 4,00 \text{ \AA}$$

$$c_{5\text{GPa}} = 9,9 \text{ \AA}$$

$$\Delta p = 5 \text{ GPa}$$

Tetragonální krystalová struktura je charakterizována základní strukturní jednotkou tvaru kvádru se čtvercovou podstavou. Krystalografické parametry jsou a , a , c a úhly mezi všemi základními směry jsou pravé (3 body)

Objem elementární krystalografické buňky je tedy $V = a^2 \cdot c$

a) Pro stanovení modulu objemové pružnosti lze tedy napsat

$$B_V = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V} = -a_0^2 \cdot c_0 \frac{\Delta p}{a_{5\text{GPa}}^2 \cdot c_{5\text{GPa}} - a_0^2 \cdot c_0} \quad (1 \text{ bod})$$

$$\text{číselně: } B_V = -4^2 \cdot 10,9 \frac{5}{4^2 \cdot 9,9 - 4^2 \cdot 10,9} \text{ GPa} = -10,9 \frac{5}{9,9 - 10,9} \text{ GPa}$$

$$= 54,5 \text{ GPa} \quad (3+2 \text{ body za jednotku})$$

$$\text{b) Hustota: } \rho = \frac{3 m(\text{EuRu}_2\text{P}_2)}{a^2 \cdot c} = \frac{3 m_u \cdot (A_r(\text{Eu}) + 2A_r(\text{Ru}) + 2A_r(\text{P}))}{a^2 \cdot c} \quad (3 \text{ body})$$

$$\text{Tedy } \frac{\rho_{5\text{GPa}}}{\rho_0} = \frac{\frac{a_{5\text{GPa}}^2 \cdot c_{5\text{GPa}}}{m(\text{EuRu}_2\text{P}_2)}}{\frac{a_0^2 \cdot c_0}{m(\text{EuRu}_2\text{P}_2)}} = \frac{a_0^2 \cdot c_0}{a_{5\text{GPa}}^2 \cdot c_{5\text{GPa}}} = \frac{10,9}{9,9} \approx 1,1 \quad (3 \text{ body})$$

Hustota se zvýší o přibližně 10%. (1 body)

c) S využitím prvního vztahu z řešení bodu b) a jelikož shodou okolností $a_0 = a_{5\text{GPa}}$

$$\begin{aligned}\rho(0 \text{ GPa}) - \rho(5 \text{ GPa}) &= \frac{3 \cdot m(\text{EuRu}_2\text{P}_2)}{a_0^2 \cdot c_0} - \frac{3 \cdot m(\text{EuRu}_2\text{P}_2)}{a_{5\text{GPa}}^2 \cdot c_{5\text{GPa}}} \\ &= \frac{3 \cdot m_u \cdot (Ar(\text{Eu}) + 2Ar(\text{Ru}) + 2Ar(\text{P}))}{a_0^2} \left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_{5\text{GPa}}} \right) \quad (5 \text{ body})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{číselně: } \rho(0 \text{ GPa}) - \rho(5 \text{ GPa}) &= \frac{1,6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 416}{4^2 \cdot 10^{-20}} \cdot \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \frac{1}{10^{-10}} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ &= \frac{1,6 \cdot 1248}{16} \cdot \left(\frac{1}{110} \right) \frac{10^{-27}}{10^{-30}} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ &= \frac{1248}{1100} \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ &\approx 1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (4 \text{ body})\end{aligned}$$