

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní program: MDUPN

Varianta B

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (20 bodů)

Spočtete

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{6 + 11 \cos x + 6 \cos^2 x + \cos^3 x} dx$$

na maximálních možných intervalech a tyto intervaly určete.

Úloha 2 (20 bodů)

(a) Ukažte, že množina bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pro které

$$x^2 + 4y^2 \cos x - z^2 = 2xyz,$$

je na nějakém okolí bodu $(0, 1, 2)$ grafem spojitě diferencovatelné funkce $f(x, y)$, která je definovaná na jistém okolí bodu $(0, 1)$ a splňuje $f(0, 1) = 2$.

(b) Spočtete parciální derivaci f podle x v bodě $(0, 1)$.

(c) Spočtete totální diferenciál f v bodě $(0, 1)$.

(d) Má funkce f v bodě $(0, 1)$ lokální minimum?

Pokud používáte větu o implicitních funkcích, ověřte její předpoklady.

Úloha 3 (20 bodů)

Mongeovo promítání: $O = [10, 16]$, pravotočivá soustava souřadnic.

Protáhlý rotační elipsoid je dán:

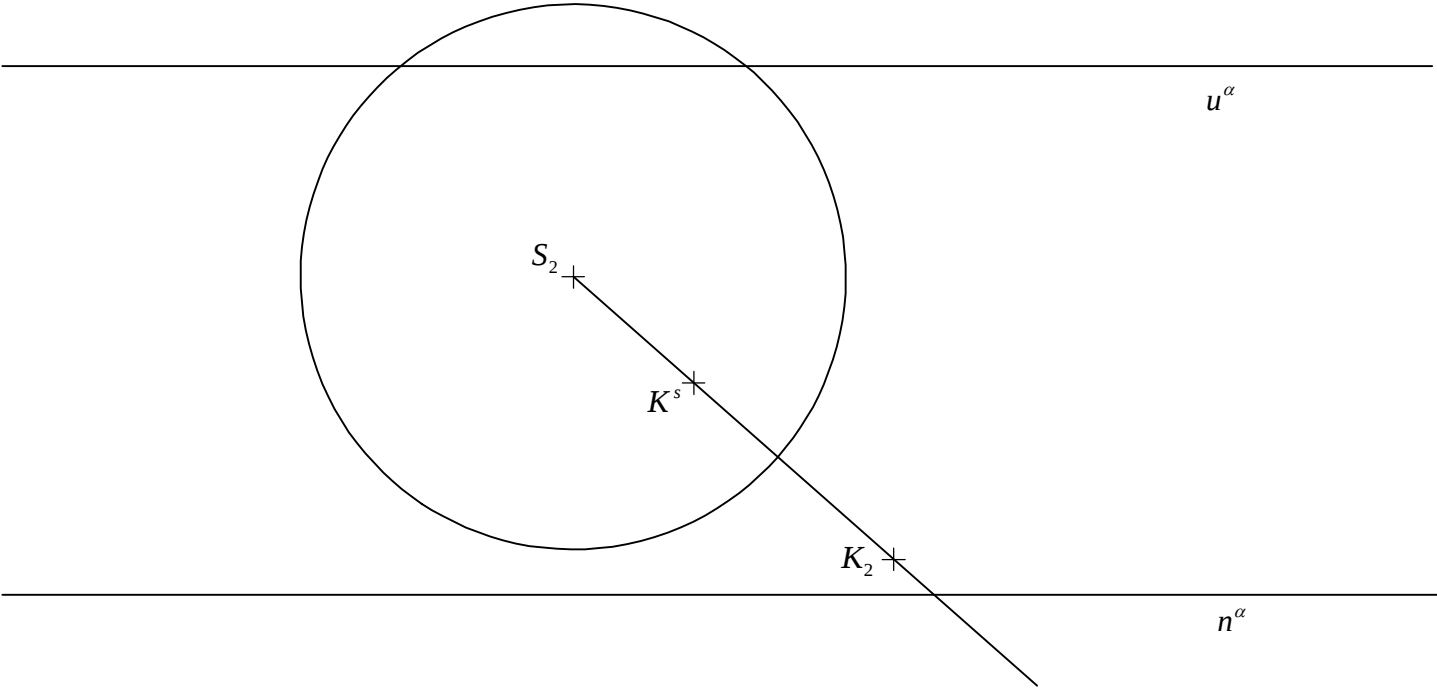
1. rotačním pohybem: osa $o \perp \pi$,
2. tvořící elipsou e v rovině rovnoběžné s nárysnou, bod $S = [0; 5,5; 5]$ je střed elipsy, velikosti poloos jsou $a = 5$, $b = 3,5$.

Sestrojte průměty elipsoidu. Zobraďte řez elipsoidu rovinou $\rho(9; 10; 7)$. Určete přesně body řezu na obrysech, sestrojte osy průmětu řezu, stanovte viditelnost křivky řezu v půdoryse i náryse. (Rýsujte na nový list papíru).

Úloha 4 (20 bodů)

Středové promítání: S_2 – pravoúhlý průmět středu promítání do nákresny, k_d – distanční kružnice.

Určete vzdálenost bodu K od roviny α , je-li bod K určen svým středovým (K^s) a pravoúhlým (K_2) průmětem a rovina svou stopou (n^α) a úběžnicí (u^α).



PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní program: MDUPN

Varianta B – Řešení

Úloha 1 (20 bodů)

Integrál nejdříve upravíme

$$I = \int \frac{\tan x}{6 + 11 \cos x + 6 \cos^2 x + \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x (6 + 11 \cos x + 6 \cos^2 x + \cos^3 x)} dx.$$

Po substituci $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$ dostáváme

$$I = - \int \frac{1}{t(6 + 11t + 6t^2 + t^3)} dt = - \int \frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)} dt.$$

Zde použijeme rozklad na parciální zlomky. Protože máme jen jednonásobné reálné kořeny, můžeme použít zakrývací pravidlo. Obdržíme

$$\frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)} = \frac{1}{6t} - \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t+2)} - \frac{1}{6(t+3)}.$$

Tak dostaneme

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{6} \int \frac{1}{t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+2} dt + \frac{1}{6} \int \frac{1}{t+3} dt \stackrel{c}{=} \\ &\stackrel{c}{=} -\frac{1}{6} \log |t| + \frac{1}{2} \log |t+1| - \frac{1}{2} \log |t+2| + \frac{1}{6} \log |t+3| = \\ &= -\frac{1}{6} \log |\cos x| + \frac{1}{2} \log(\cos x + 1) - \frac{1}{2} \log(\cos x + 2) + \frac{1}{6} \log(\cos x + 3). \end{aligned}$$

Maximální intervaly jsou $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$, $(\frac{\pi}{2}, \pi) + 2k\pi$ a $(\pi, \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Úloha 2 (20 bodů)

(a) Označme $F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 \cos x - z^2 - 2xyz$. Zřejmě F je spojitě diferencovatelná funkce, $F(0, 1, 2) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -2z - 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 2) = -4 \neq 0,$$

tedy množina $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, z) = 0\}$ je podle věty o implicitních funkcích na nějakém okolí bodu $(0, 1, 2)$ grafem spojitě diferencovatelné funkce f , pro kterou $f(0, 1) = 2$.

(b) Snadno spočteme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 4y^2 \sin x - 2yz, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 2) = -4.$$

Z věty o implicitních funkcích pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 2)},$$

tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -1.$$

(c) Podobně jako v (b) spočteme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 8y \cos x - 2xz, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1, 2) = 8,$$

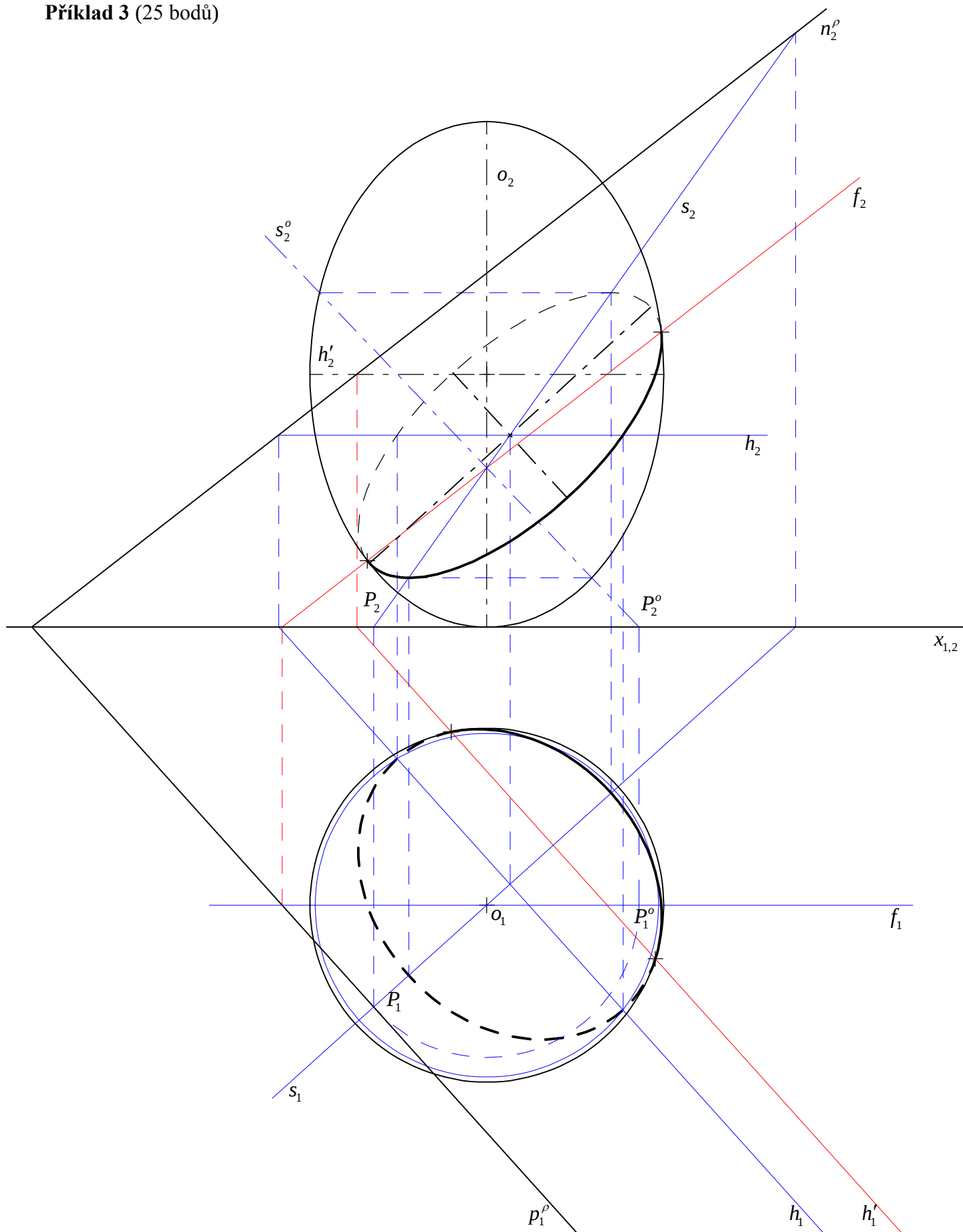
tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2.$$

Ze spojitosti parciálních derivací plyne existence totálního diferenciálu, a tedy $Df(0, 1)(h, k) = -h + 2k$.

(d) Parciální derivace f v bodě $(0, 1)$ jsou (dokonce obě) nenulové, tedy není splněna nutná podmínka pro existenci lokálního extrému v bodě $(0, 1)$. Funkce f tedy lokální extrém v bodě $(0, 1)$ nemá.

Příklad 3 (25 bodů)



Příklad 4 (25 bodů)

