

Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2025, varianta A

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 0 až 10 bodů. Za každou dobře označenou¹ odpověď získáte +2 body, za každou špatně označenou odpověď –2 body, za otázku bez odpovědi 0 bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni 0 body.

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupcečky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnutí odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi	
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne
(a)	2	●	○ (+2)	●	○ (+2)	○	○ (0)	○	○ (0)
(b)	3	○	● (+2)	○	○ (0)	○	● (+2)	✗	● (+2)
(c)	Méně než 12	●	○ (+2)	○	● (–2)	○	○ (0)	✗	○ (0)
(d)	Kladné číslo	●	○ (+2)	○	○ (0)	○	● (–2)	✗	● (–2)
(e)	1	○	● (+2)	●	○ (–2)	○	● (+2)	✗	● (+2)
Bodů:		10		0		2		2	

¹Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

Úloha 1. Je dána funkce $f(x) = \frac{\cos x}{1+x^4}$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Funkce f je prostá.
- (b) Funkce f je omezená.
- (c) Funkce f je rostoucí.
- (d) Funkce f je sudá.
- (e) Funkce f je periodická.

Úloha 2. Je dána funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{x^3-1} \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Graf funkce f protíná osu y v právě jednom bodě.
- (b) Definiční obor funkce je sjednocení čtyř nepřekrývajících se otevřených intervalů.
- (c) Graf funkce f protíná každou přímku rovnoběžnou s osou x v právě jednom bodě.
- (d) Graf funkce f protíná každou přímku rovnoběžnou s osou x v nejvýše jednom bodě.
- (e) Funkce g , definovaná vzorcem $g(x) = |f(x)|$, je sudá.

Úloha 3. Najděte zlomek v základním tvaru, pro který platí: jmenovatel zlomku je o tři větší než číselník a hodnota zlomku se nezmění, jestliže k číselníku přičteme číslo 1 a ke jmenovateli přičteme číslo 2,5. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Hodnota zlomku je větší než $1/2$.
- (b) Číselník i jmenovatel zlomku jsou prvočísla.
- (c) Přičteme-li ke zlomku jeho obrácenou hodnotu, dostaneme číslo větší než 3.
- (d) Druhá mocnina zlomku je menší než $1/6$.
- (e) Součin číselníku a jmenovatele je větší než 12.

Úloha 4. Uvažujme aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jejíž první člen je $a_1 = 5$ a součet prvních n členů je $S_n = 3n^2 + 2n$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) $a_2 = 11$.
- (b) Diference posloupnosti je $d = 6$.
- (c) $2a_{10} > 100$.
- (d) $a_n = 6n + 1$.
- (e) $S_3 = 33$.

Úloha 5. Necht' M_a je množina všech řešení rovnice

$$\frac{1}{|x|} = x + a,$$

kde a je reálný parametr v oboru reálných čísel. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Existuje a reálné takové, že M_a je prázdná.
- (b) Existuje a reálné takové, že M_a je jednoprvková.
- (c) Existuje a reálné takové, že M_a je dvouprvková.
- (d) Existuje a reálné takové, že M_a je tříprvková.
- (e) Existuje a reálné takové, že M_a je čtyřprvková.

Úloha 6. Necht' M je množina všech řešení rovnice

$$\cos \sin x = \cos \cos x$$

v oboru reálných čísel. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Pokud $x \in M$ pak $2x \in M$.
- (b) Pokud $x \in M$ pak $3x \in M$.
- (c) Pokud $x \in M$ pak $-x \in M$.
- (d) Pokud $x \in M$ pak $x^2 \in M$.
- (e) Pokud $x \in M$ pak $5x \in M$.

Úloha 7. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$ (vrcholy jsou pojmenované v abecedním pořadí proti chodu hodinových ručiček). Tři z jeho vrcholů jsou: $A = [-2; -3]$, $B = [5; -5]$, $D = [3; 1]$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Souřadnice vrcholu C jsou $[10; -1]$.
- (b) Souřadnice vrcholu C jsou $[-4; 3]$.
- (c) Obsah rovnoběžníku $ABCD$ je 38 čtverečních jednotek.
- (d) Střed rovnoběžníku $ABCD$ má souřadnice $[4; -2]$.
- (e) Délka strany AB rovnoběžníku $ABCD$ je větší než 7.

Úloha 8. Řešte nerovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

$$x + 1 \leq \sqrt{x^2 + 3x}.$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Všechna řešení nerovnice leží v jednom souvislém polootevřeném intervalu.
- (b) Množinu všech řešení nerovnice lze vyjádřit jako sjednocení tří disjunktních polootevřených intervalů.
- (c) Pokud x_1 a x_2 jsou dvě řešení nerovnice, pak je řešením i jejich součin.
- (d) Pokud x_1 a x_2 jsou dvě řešení nerovnice, pak je řešením i jejich součet.
- (e) Pokud x je řešení nerovnice, pak je řešením i jakýkoli celočíselný násobek toho čísla.

Úloha 9. Jsou dány body $K = [1; 2; 3]$ a $L = [-4; 5; 6]$. Určete reálná čísla m, n, k, p tak, aby body $R = [0; m; n]$ a $S = [k; p; 6]$ ležely na přímce KL . Rozhodněte, zda platí:

- (a) $m = 2,8$.
- (b) $n = 3,6$.
- (c) $k = -4$.
- (d) $p = 4,8$.
- (e) Vzdálenost bodů K a S je $\sqrt{43}$.

Úloha 10. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Z cifer 1, 4, 5, 7 lze trojmístné číslo s různými ciframi dělitelné 5 vytvořit nejvýš 6 způsoby.
- (b) Z cifer 1, 4, 5, 7 lze trojmístné číslo s různými ciframi dělitelné 3 vytvořit aspoň 6 způsoby.
- (c) Při hodu dvěma spravedlivými 8-stěnnými hracími kostkami, které mají stěny označeny čísly 1 až 8, padnou čísla, jejichž součet je dělitelný 3 s pravděpodobností nejvýš $1/3$.
- (d) Při 3 hodech spravedlivou 6-stěnnou hrací kostkou nepadne ani jednou číslo dělitelné 3 s pravděpodobností menší než $1/3$.
- (e) Při 3 hodech spravedlivou 6-stěnnou hrací kostkou padne právě jednou číslo dělitelné 3 s pravděpodobností menší než $1/2$.

Řešení 2025

Varianta A

(1) N A N A N

(2) N A N A A

(3) N A N A N

(4) A A A N A

(5) N A A A N

(6) N A A N A

(7) A N A A A

(8) N A A N N

(9) N A A N A

(10) A A N A A

Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2025, varianta B

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 0 až 10 bodů. Za každou dobře označenou¹ odpověď získáte +2 body, za každou špatně označenou odpověď –2 body, za otázku bez odpovědi 0 bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni 0 body.

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupčky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnutí odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi	
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne
(a)	2	●	○ (+2)	●	○ (+2)	○	○ (0)	○	○ (0)
(b)	3	○	● (+2)	○	○ (0)	○	● (+2)	✗	● (+2)
(c)	Méně než 12	●	○ (+2)	○	● (–2)	○	○ (0)	✗	○ (0)
(d)	Kladné číslo	●	○ (+2)	○	○ (0)	○	● (–2)	✗	● (–2)
(e)	1	○	● (+2)	●	○ (–2)	○	● (+2)	✗	● (+2)
Bodů:		10		0		2		2	

¹Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

Úloha 1. Je dána funkce $f(x) = e^{e^{x^3}}$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Funkce f je prostá.
- (b) Funkce f je omezená.
- (c) Funkce f je rostoucí.
- (d) Funkce f je lichá.
- (e) Funkce f je periodická.

Úloha 2. Je dána funkce $f(x) = 1 + \frac{2}{1 - \frac{2}{1 + \frac{2}{x}}}$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Graf funkce f protíná osu y v právě jednom bodě.
- (b) Definiční obor funkce je sjednocení čtyř nepřekrývajících se otevřených intervalů.
- (c) Graf funkce f protíná každou přímku rovnoběžnou s osou x v právě jednom bodě.
- (d) Graf funkce f protíná každou přímku rovnoběžnou s osou x v nejvýše jednom bodě.
- (e) Funkce g , definovaná vzorcem $g(x) = |f(x - 2)|$, je sudá.

Úloha 3. Tři čísla splňují následující podmínky. Dělíme-li součet prvního a druhého čísla třetím číslem, vyjde podíl 1 se zbytkem 2. Dělíme-li součet prvního a třetího čísla číslem druhým, vyjde podíl 2 beze zbytku a při dělení součtu druhého a třetího čísla prvním číslem je podíl 3 se zbytkem 2. Určete tato tři čísla a rozhodněte, zda platí:

- (a) První číslo je v dané trojici nejmenší.
- (b) Všechna tři čísla jsou větší než 5.
- (c) Součet všech čísel je větší než 20.
- (d) Druhé číslo je aritmetickým průměrem prvního a třetího čísla.
- (e) Všechna tři čísla jsou sudá.

Úloha 4. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je třetí člen $a_3 = 18$ a šestý člen $a_6 = 486$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) $2a_4 < 100$.
- (b) $a_1 = 2$.
- (c) Kvocient posloupnosti je $q = 3$.
- (d) Součin $a_2 \cdot a_5 = 324$.
- (e) Tato posloupnost je zároveň i aritmetická.

Úloha 5. Necht' M_a je množina všech řešení rovnice $|x| = x^2 + a$, kde a je reálný parametr, v oboru reálných čísel. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Existuje a reálné takové, že M je prázdná.
- (b) Existuje a reálné takové, že M je jednoprvková.
- (c) Existuje a reálné takové, že M je dvouprvková.
- (d) Existuje a reálné takové, že M je tříprvková.
- (e) Existuje a reálné takové, že M je čtyřprvková.

Úloha 6. Necht' M je množina všech řešení rovnice

$$\log(\cos x + 1) = 2 \log(\cos x + 1)$$

v oboru reálných čísel. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Pokud $x \in M$ pak $2x \in M$.
- (b) Pokud $x \in M$ pak $3x \in M$.
- (c) Pokud $x \in M$ pak $-x \in M$.
- (d) Pokud $x \in M$ pak $x^2 \in M$.
- (e) Pokud $x \in M$ pak $5x \in M$.

Úloha 7. Rovnoramenný trojúhelník má obvod 32 cm. Rameno trojúhelníku je o 2 cm kratší než základna. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Obsah trojúhelníku ABC je 48 cm^2 .
- (b) Výška k základně má délku 10 cm.
- (c) Ramena jsou shodná a mají délky 10 cm.
- (d) Velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při jeho hlavním vrcholu je menší než 90° .
- (e) Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC při základně jsou menší než 45° .

Úloha 8. Řešte nerovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

$$x - 1 < \sqrt{x^2 - 4}.$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Všechna řešení nerovnice leží v jednom souvislém otevřeném intervalu.
- (b) Množinu všech řešení nerovnice lze vyjádřit jako sjednocení tří disjunktních intervalů.
- (c) Pokud x_1 a x_2 jsou dvě řešení nerovnice, pak je řešením i jejich součin.
- (d) Pokud x_1 a x_2 jsou dvě řešení nerovnice, pak je řešením i jejich součet.
- (e) Pokud x je řešení nerovnice, pak je řešením i jakýkoli celočíselný násobek toho čísla.

Úloha 9. Jsou dány vektory $r = (9; 1; 0)$ a $s = (-1; 2; 3)$. Určete $p \in \mathbb{R}$ tak, aby vektor $t = (17; p; 3)$ byl kolmý k vektoru s . Rozhodněte, zda platí:

- (a) $p = 5$.
- (b) $|s + t| > 19$.
- (c) Vektory r , s a t lze umístit do jedné roviny.
- (d) $|t - r| > |t| - |r|$.
- (e) Úhel mezi vektory r a s je tupý.

Úloha 10. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Z cifer 2, 4, 5, 8 lze trojmístné číslo s různými ciframi dělitelné 5 vytvořit nejvýš 6 způsoby.
- (b) Z cifer 2, 4, 5, 8 lze trojmístné číslo s různými ciframi dělitelné 3 vytvořit aspoň 6 způsoby.
- (c) Při hodu dvěma spravedlivými 8-stěnnými hracími kostkami, které mají stěny označeny čísly 1 až 8, padnou čísla, jejichž součet je dělitelný 3 s pravděpodobností nejvýš $1/3$.
- (d) Při 3 hodech spravedlivou 6-stěnnou hrací kostkou nepadne ani jednou číslo 1 nebo 2 s pravděpodobností menší než $1/3$.
- (e) Při 3 hodech spravedlivou 6-stěnnou hrací kostkou padne právě dvakrát číslo 1 nebo 2 s pravděpodobností menší než $1/4$.

Řešení 2025

Varianta B

(1) A N A N N

(2) N A N A N

(3) A N N A A

(4) N A A N N

(5) A N A A A

(6) N A A N A

(7) A N A A N

(8) N A A N N

(9) N N A A A

(10) A A N A A