PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2019

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)
Nechť

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= e^{\operatorname{arccotg} y},\\
g(x, y) &= y,\\
M &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ 2y^3 - y + 2x^2 = 0,\ y > 0\}.
\end{aligned}
$$

(a) Rozhodněte, zda množina M je omezená.
(b) Ukažte, že $\overline{M} = M \cup \{[0, 0]\}$.
(c) Nalezněte supremum a infimum funkce g na množině M a rozhodněte, zda a případně kde se jich nabývá.
(d) Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a rozhodněte, zda a případně kde se jich nabývá.

Úloha 2 (25 bodů)
Spočtěte

$$\int_M (x + y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je množina omezená křivkami $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$, $y = 0$.

Úloha 3 (25 bodů)
Uvažujme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení s hustotou

$$f(x; \lambda) = \frac{x}{\lambda} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\lambda}\right\} \mathcal{I}\{x > 0\}, \quad \lambda > 0.$$

(a) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr $\lambda > 0$.
(b) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu pro neznámý parametr λ.
(c) Sestavte
  (i) test poměrem věrohodnosti,
  (ii) Raoův skórový test,
  (iii) Waldův test

  pro nulovou hypotézu $H_0 : \lambda = 1$ oproti alternativě $H_1 : \lambda \neq 1$.

Úloha 4 (25 bodů)
Kupónový dluhopis má nominální hodnotu N a dobu splatnosti n let. Kupónové platby jsou půlroční polhůtné, roční kupónová sazba je r. K datu splatnosti je vyplacena nominální hodnota.

a) Zapište vzorec pro spravedlivou cenu dluhopisu P_0 k datu emise při požadovaném ročním nominálním výnosu do splatnosti 2 procenta s půlroční frekvencí úročení. Upravte podle možností na co nejjednodušší tvar včetně použití součtových vzorců.

b) Zapište vzorec pro střední dobu splatnosti (duraci) příjmů majitele dluhopisu, když byl zakoupen k datu emise. Uveďte, v jakých jednotkách je durace vyjádřena.

c) Zapište vzorec pro spravedlivou cenu dluhopisu P_T k datu T, od kterého zbývá 1,25 roku do data splatnosti, při ročním efektivním výnosu do splatnosti i. Stačí nesečtený tvar. Určete alikvotní úrok, který je zahrnutý v zapsané spravedlivé ceně.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2019

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)
Označme $\Phi(x, y) = 2y^3 - y + 2x^2$.

(a) Lze snadno nahlédnout, že pokud $y > 1$ pak

$$\Phi(x, y) > 2y - y = y > 1 > 0.$$

Tedy $[x, y] \notin M$. Dále, pokud $y \leq 1$ a $|x| > 1$ pak

$$\Phi(x, y) \geq -1 + 2x^2 > -1 + 2 = 1 > 0.$$

Tedy $[x, y] \notin M$. Dohromady dostáváme, že $M \subset [-1, 1] \times [0, 1]$, a tedy je omezená.

(b) Inkluze $\overline{M} \subset M \cup \{[0, 0]\}$ plyne z

$$\overline{M} \subset \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ \Phi(x, y) = 0,\ y \geq 0\}$$

a z faktu, že $\Phi(x, 0) = 0$ implikuje $x = 0$. Pro opačnou inkluzi stačí nalézt posloupnost bodů $z_n \in M$, že $\lim_{n\to\infty} z_n = [0, 0]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ volme

$$z_n = \left[\sqrt{\frac{\frac{2}{n+1} - 2\left(\frac{2}{n+1}\right)^3}{2}}, \frac{2}{n+1} \right].$$

(c) Z (a) dostáváme, že $\overline{M}$ je kompaktní. Ze spojitosti g na $\overline{M}$ (g je polynom) plyne, že g nabývá na $\overline{M}$ maxima i minima. Body podezřelé z extrému dostaneme z věty o Lagrangeových multiplikátorech (vazba Φ). Protože Φ a g jsou polynomy, jsou též $C^1(\mathbb{R}^2)$, a tedy můžeme použít větu o Lagrangeových multiplikátorech, která říká, že podezřelé body jsou body splňující

$$\nabla\Phi(x, y) = [4x, 6y^2 - 1] = [0, 0] \tag{1}$$

nebo

$$\nabla g(x, y) + \lambda\nabla\Phi(x, y) = [0, 0] \tag{2}$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Rovnici (1) splňují pouze body $\left[0, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$. Tyto body ale neleží v množině $\overline{M}$. Rovnici (2) splňují body $[0, y]$, pro nějaká $y \in \mathbb{R}$. Z těchto bodů v množině $\overline{M}$ leží pouze body $[0, 0]$ a $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. V bodě $[0, 0]$ nabývá funkce g svého minima 0 na množině $\overline{M}$. Protože bod $[0, 0] \notin M$, tak zde g svého minima nenabývá a jedná se pouze o infimum. V bodě $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ nabývá funkce g svého maxima $\frac{1}{\sqrt{2}}$ na množině $\overline{M}$. Protože bod $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \in M$, tak zde g nabývá rovněž maxima na množině M.

(d) Použijeme fakt, že funkce exp je rostoucí a funkce arccotg je klesající. Tedy funkce $y \mapsto e^{\operatorname{arccotg} y}$ je klesající. Z toho plyne, že

$$\sup_M f = e^{\operatorname{arccotg}(\inf_M g)},$$
$$\min_M f = e^{\operatorname{arccotg}(\max_M g)}.$$

Suprema se nenabývá a minima se nabývá v bodě $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Úloha 2 (25 bodů)

Body množiny M mají první souřadnici v intervalu $[0, 2]$. Z rovnice $\sqrt{x} = 2 - x$ dostaneme $x = 1$. Z Fubiniovy věty pak dostáváme

$$\begin{aligned}\int_M (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} (x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} (x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \mathrm{d}x + \int_1^2 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2-x} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2 - \frac{1}{2}x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 + \left[2x - \frac{1}{6}x^3\right]_1^2 = \frac{89}{60}.\end{aligned}$$

Úloha 3 (25 bodů)

(a) Nejdříve vyjádříme věrohodnost

$$L_n(\lambda; \boldsymbol{X}) = \frac{\prod_{i=1}^n X_i}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2\lambda}\right\},\ X_i > 0,\ \forall i.$$

Logaritmická věrohodnost je pak

$$\ell_n(\lambda; \boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n \log X_i - n\log\lambda - \frac{1}{2\lambda}\sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Následně zderivováním dostaneme skórovou statistiku

$$U_n(\lambda; \boldsymbol{X}) = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Hledaný maximálně věrohodný odhad je řešením věrohodnostní rovnice $\partial\ell_n(\lambda; \boldsymbol{X})/\partial\lambda = 0$ vzhledem k neznámému parametru λ, tj.

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Pozorovaná (výběrová) informační matice je

$$I_n(\lambda; \boldsymbol{X}) = -\frac{1}{n}\frac{\partial U_n(\lambda; \boldsymbol{X})}{\partial\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{n\lambda^3}\sum_{i=1}^n X_i^2,$$

která po vyčíslení v maximálně věrohodném odhadu nabývá kladné hodnoty

$$I_n(\hat{\lambda}; \boldsymbol{X}) = 4n^2\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{-2} > 0.$$

Tím pádem je nalezený maximálně věrohodný odhad právě jeden.

(b) Fisherovu informační matici spočítáme jako

$$I(\lambda) = \mathrm{E}I_n(\lambda; \boldsymbol{X}) = \frac{1}{\lambda^2},$$

protože

$$\mathrm{E}X_i^2 = \int_0^\infty \frac{x^3}{\lambda}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\lambda}\right\}\mathrm{d}x = 2\lambda\int_0^\infty ye^{-y}\,\mathrm{d}y = 2\lambda.$$

Pak platí, že

$$\sqrt{n}\left(\hat{\lambda}-\lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}\left(0,\lambda^2\right), \quad n\to\infty.$$

(c,i) Test podílem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : \lambda = 1$ oproti alternativě $H_1 :$ $\lambda \neq 1$ je založen na testové statistice

$$D_n = 2\log\frac{L_n(\hat{\lambda};\boldsymbol{X})}{L_n(1;\boldsymbol{X})} = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n - 2n\log\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $D_n > \chi_1^2(1-\alpha)$, kde $\chi_1^2(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti.

(c,ii) Raoův skórový test pro nulovou hypotézu $H_0 : \lambda = 1$ oproti alternativě $H_1 : \lambda \neq 1$ je založen například na testové statistice

$$R_n = \frac{[U_n(1;\boldsymbol{X})]^2}{nI(1)} = n\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - 1\right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $R_n > \chi_1^2(1-\alpha)$.

(c,iii) Waldův test pro nulovou hypotézu $H_0 : \lambda = 1$ oproti alternativě $H_1 : \lambda \neq 1$ je založen například na testové statistice

$$W_n = n\left(\hat{\lambda}-1\right)^2 I\left(\hat{\lambda}\right) = n\left(1-\frac{2n}{\sum_{i=1}^n X_i^2}\right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $W_n > \chi_1^2(1-\alpha)$.

Úloha 4 (25 bodů)

a) Půlroční kupónová platba je $C = \frac{rN}{2}$. Diskontní faktor odvozený od ročního nominálního výnosu do splatnosti $i_2 = 0{,}02$ s půlročním úročením je $v_2 = \frac{1}{1{,}01}$. Pak máme

$$\begin{aligned} P_0 &= C\sum_{t=1}^{2n} v_2^t + Nv_2^{2n} = Cv_2\frac{1-v_2^{2n}}{1-v_2} + Nv_2^{2n} = C\frac{1-v_2^{2n}}{\frac{i_2}{2}} + Nv_2^{2n} \\ &= 100C\left[1-\left(\frac{1}{1{,}01}\right)^{2n}\right] + N\left(\frac{1}{1{,}01}\right)^{2n} \\ &= 50rN\left[1-\left(\frac{1}{1{,}01}\right)^{2n}\right] + N\left(\frac{1}{1{,}01}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

b) Střední doba splatnosti v půlrocích je

$$D = \frac{1}{P_0}C\sum_{t=1}^{2n} t v_2^t + 2nNv_2^{2n}.$$

c) Diskontní faktor odvozený od ročního efektivního výnosu do splatnosti i je $v = \frac{1}{1+i}$, přičemž $1+i = (1+\frac{i_2}{2})^2$. Pak máme

$$P_T = \left[\frac{rN}{2}\sum_{t=0}^{2} v^{\frac{t}{2}} + Nv\right] v^{\frac{1}{4}}.$$

Alikvotní úrok je $\frac{rN}{2}v^{\frac{1}{4}}$.