Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2017

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Příklad 1 (25 bodů)

Spočtěte

$$\int_M x^3 y \, dxdy \ ,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < 3, 0 < y < 1, y < x\}$.

Příklad 2 (25 bodů)

Definujme funkci $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x, y) = \sin(|x|y).$$

Určete její totální diferenciál všude, kde existuje.

Příklad 3 (25 bodů)

Uvažujme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení s hustotou

$$f(x; \gamma) = \frac{2x}{\gamma} \exp\left\{-\frac{x^2}{\gamma}\right\} \mathcal{I}\{x > 0\}, \quad \gamma > 0.$$

(a) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr $\gamma > 0$.

(b) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu pro neznámý parametr γ.

(c) Sestavte

  (i) test poměrem věrohodnosti,
  (ii) Raoův skórový test,
  (iii) Waldův test

  pro nulovou hypotézu $H_0 : \gamma = 1$ oproti alternativě $H_1 : \gamma \neq 1$.

Příklad 4 (25 bodů)

Uvažujte investiční projekty X a Y reprezentované peněžními toky $C_X = (x_0, x_1)$ a $C_Y = (y_0, y_1)$ v časových okamžicích 0, 1. Předpokládejme $x_0 < 0$, $y_0 < 0$, $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, $|x_0| < x_1$, $|y_0| < y_1$.

(i) Vyjádřete obecně současné hodnoty obou uvedených projektů při hodnotící úrokové míře (ceně kapitálu) i.

(ii) Pro každý projekt zvlášť uveďte obor hodnot i, pro které je z hlediska současné hodnoty projekt přijatelný.

(iii) Uvažujte konkrétní projekty reprezentované peněžními toky $C_X = (-1, 1.1)$ a $C_Y = (-2, 2.1)$. Máte možnost přijmout přijmout nejvýše jeden z těchto projektů. Zjistěte, při kterých hodnotách i přijmete

   (a) projekt X

   (b) projekt Y

   (c) nepřijmete žádný projekt.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2017

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Použijeme Fubiniho větu. To je možné, protože množina M je měřitelná a integrovaná funkce je spojitá, tedy měřitelná, a nezáporná na M. Je pro nás výhodné psát

$$M = M_1 \cup M_2, \quad M_1 = \{0 < x \leq 1, 0 < y < x\}, \quad M_2 = \{1 < x < 3, 0 < y < 1\} .$$

Nyní

$$\begin{aligned}\int_{M_1} x^3 y \, dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_0^x x^3 y \, dy \Big) \, dx = \int_0^1 x^3 \Big[\frac{y^2}{2} \Big]_0^x \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^5}{2} \, dx = \Big[\frac{x^6}{12} \Big]_0^1 = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_{M_2} x^3 y \, dxdy &= \int_1^3 \Big(\int_0^1 x^3 y \, dy \Big) \, dx = \int_1^3 x^3 \Big[\frac{y^2}{2} \Big]_0^1 \, dx \\ &= \int_1^3 \frac{x^3}{2} \, dx = \Big[\frac{x^4}{8} \Big]_1^3 = \frac{81}{8} - \frac{1}{8} = 10 .\end{aligned}$$

Tedy

$$\int_M xy^3 \, dxdy = \int_{M_1} xy^3 \, dxdy + \int_{M_2} xy^3 \, dxdy = \frac{1}{12} + 10 = \frac{121}{12} .$$

Příklad 2 (25 bodů)

Pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = |x| \cos(|x|y)$$

a tato parciální derivace je spojitá na $\mathbb{R}^2$. Dále, na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \frac{x}{|x|} \cos(|x|y)$$

a tato parciální derivace je spojitá na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. Proto zde totální diferenciál existuje a splňuje

$$df(x,y)(h_1,h_2) = y \frac{x}{|x|} \cos(|x|y) h_1 + |x| \cos(|x|y) h_2.$$

Dále na množině $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 0, y \neq 0\}$ neexistuje limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,y) - f(0,y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(|t|y)}{t}.$$

Proto parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ zde neexistuje a neexistuje zde ani totální diferenciál.

Zbývá vyšetřit chování v počátku. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin 0 - \sin 0}{t} = 0$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin 0 - \sin 0}{t} = 0.$$

Proto jediným kandidátem na totální diferenciál je lineární funkce $L \colon (h_1,h_2) \mapsto 0$. Ověřme, zda splňuje definici totálního diferenciálu. Zkoumáme limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - L(h_1,h_2)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(|h_1|h_2) - \sin 0 - 0}{\|h\|}.$$

Tato limita se rovná nule, protože

$$\left| \frac{\sin(|h_1|h_2)}{\|h\|} \right| \leq \frac{|h_1 h_2|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\|.$$

Proto totální diferenciál v počátku existuje a je triviální.

Příklad 3 (25 bodů)

(a) Nejdříve vyjádříme věrohodnost

$$L_n(\gamma; \mathbf{X}) = \frac{2^n \prod_{i=1}^n X_i}{\gamma^n} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\gamma}\right\}, \quad X_i > 0, \forall i.$$

Logaritmická věrohodnost je pak

$$l_n(\gamma; \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \log X_i + n \log 2 - n \log \gamma - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Následně zderivováním dostaneme skórovou statistiku

$$U_n(\gamma; \mathbf{X}) = -\frac{n}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Maximálně věrohodný odhad je řešením věrohodnostní rovnice $\partial l_n(\gamma; \mathbf{X})/\partial\gamma = 0$ vzhledem k neznámému parametru γ, tj.

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Pozorovaná (výběrová) informace je

$$I_n(\gamma; \mathbf{X}) = -\frac{1}{n} \frac{\partial U_n(\gamma; \mathbf{X})}{\partial\gamma} = -\frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{n\gamma^3} \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

která po vyčíslení v maximálně věrohodném odhadu nabývá kladné hodnoty

$$I_n(\hat{\gamma}; \mathbf{X}) = n^2 \left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{-2} > 0.$$

Tím pádem je nalezený maximálně věrohodný odhad právě jeden.

(b) Fisherovu informaci spočítáme jako

$$I(\gamma) = \mathsf{E} I_n(\gamma; \mathbf{X}) = \frac{1}{\gamma^2},$$

protože

$$\mathsf{E} X_i^2 = \int_0^\infty \frac{2x^3}{\gamma} \exp\left\{-\frac{x^2}{\gamma}\right\} \mathrm{d}x = \gamma \int_0^\infty y e^{-y} \mathrm{d}y = \gamma.$$

Pak platí, že

$$\sqrt{n}\,(\hat{\gamma} - \gamma) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{N}\left(0, \gamma^2\right), \quad n \to \infty.$$

(c,i) Test podílem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : \gamma = 1$ oproti alternativě $H_1 : \gamma \neq 1$ je založen na testové statistice

$$D_n = 2 \log \frac{L_n(\hat{\gamma}; \mathbf{X})}{L_n(1; \mathbf{X})} = 2 \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n - 2n \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $D_n > \chi_1^2(1-\alpha)$, kde $\chi_1^2(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti.

(c,ii) Raoův skórový test pro nulovou hypotézu $H_0 : \gamma = 1$ oproti alternativě $H_1 : \gamma \neq 1$ je založen například na testové statistice

$$R_n = \frac{[U_n(1; \mathbf{X})]^2}{nI(1)} = n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 1 \right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $R_n > \chi_1^2(1 - \alpha)$.

(c,iii) Waldův test pro nulovou hypotézu $H_0 : \gamma = 1$ oproti alternativě $H_1 : \gamma \neq 1$ je založen například na testové statistice

$$W_n = n \left(\hat{\gamma} - 1\right)^2 I\left(\hat{\gamma}\right) = n \left(1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $W_n > \chi_1^2(1 - \alpha)$.

Příklad 4 (25 bodů)

(i) Označme PV_X resp. PV_Y současné hodnoty plynoucí z projektů X resp. Y. Platí

$$PV_X = x_0 + \frac{x_1}{1+i} \qquad PV_Y = y_0 + \frac{y_1}{1+i}.$$

(ii) Projekt je přijatelný, jesliže očekávaná současná hodnota je kladná. Musí tedy platit

$$PV_X > 0, \qquad PV_Y > 0,$$

což v případě projektu X vede na nerovnost (analogicky pro projekt Y)

$$x_0 + \frac{x_1}{1+i} > 0,$$

a tedy

$$-1 < i < -1 - \frac{x_1}{x_0}.$$

(iii) Přijmeme projekt, který je přijatelný. Jsou-li přijatelné oba, přijmeme projekt s vyšší současnou hodnotou. Mají-li oba stejnou kladnou současnou hodnotu, přijmeme libovolný z nich. Projekt X je přijatelný pro $-1 < i < \frac{1}{10}$, projekt Y je přijatelný pro $-1 < i < \frac{1}{20}$. Nerovnost $PV_Y > PV_X$ platí, pokud

$$-2 + \frac{2.1}{1+i} > -1 + \frac{1.1}{1+i}$$

neboli $1 < \frac{1}{1+i}$, tj. $-1 < i < 0$. Pro $i > 0$ je $PV_Y < PV_X$. Pro $i = 0$ je $PV_Y = PV_X$.

(a) Projekt X přijmeme, je-li $0 \leq i < \frac{1}{10}$.

(b) Projekt Y přijmeme, je-li $-1 < i \leq 0$.

(c) V případě $i \geq \frac{1}{10}$ nepřijmeme žádný projekt.