Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2017

Studijní program: Fyzika
Studijní obory: FFUM

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Nechť

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos(x)}{x^4} && : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ x_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^3+k}} && : n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(a) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(b) Spočtěte $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(c) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Vysvětlete svá řešení.

Příklad 2 (25 bodů)

Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

(a) Spočtěte $f'(0)$.

(b) Rozhodněte, zda existuje $a > 0$ takové, že f je monotóní na intervalu $(-a, a)$.

(c) Rozhodněte, zda existuje $b < 0$ takové, že f je konvexní na intervalu $(-\infty, b)$.

Své odpovědi zdůvodněte.

Příklad 3 (25 bodů)

Vzduch o objemu 10 l, teplotě 273 K a tlaku 100 kPa nejprve izotermicky stlačíme na pětinu původního objemu a potom ho necháme adiabaticky rozepnout na dvojnásobek původního objemu. Jaká bude výsledná teplota po adiabatické expanzi a jakou práci plyn vykonal při celém ději?

Vzduch považujte za ideální plyn. Poissonova konstanta pro vzduch má hodnotu $\kappa = 1{,}4$.

Příklad 4 (25 bodů)

Malá kulička o hmotnosti m, přivázaná na konci provazu délky L, se pohybuje po kružnici ve svislé rovině. V nejvyšším bodě trajektorie je napětí provazu právě nulové. Určete velikost rychlosti kuličky v místech, kde je provaz vodorovný a v nejnižším bodě. Jak velkou silou je provaz v těchto místech napínán? Odpor vzduchu a hmotnost provazu neuvažujte.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2017

Studijní program: Fyzika

Studijní obory: FFUM

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

(a) Použijeme větu o dvou policistech. Víme, že

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{n^3+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^3}}, \ k \in \{1, \dots, n\}.$$

Pak

$$0 \le x_n \le \frac{n+1}{\sqrt{n^3}} \le \frac{2}{\sqrt{n}}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(b) Použijeme Taylorovy polynomy funkcí $e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\cos(x)$ a $f(x)$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{8} + o(x^4), \\ \cos(x) &= 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} + o(x^4), \\ f(x) &= \tfrac{1}{12} + o(1). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{12}.$$

(c) Použijeme Heineho větu. Lze snadno nahlédnout, že $x_n \neq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Z (a) a (b) pak plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{1}{12}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

(a)

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0,$$

kde poslední rovnost plyne z faktu, že cos je omezená funkce a h konverguje k 0.

(b) Ne. Dokážeme to sporem. Nechť $a > 0$ je takové, že f je monotóní na $(-a, a)$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $2n\pi > \frac{1}{a}$. Položme $y = \frac{1}{2n\pi}$ a $z = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. Očividně, $-a < 0 < z < y < a$ a $f(z) = -z^2 < f(0) = 0 < f(y) = y^2$. Tedy, f není monotóní na $(-a, a)$.

(c) Ano. Zřejmě,

$$f''(x) = 2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Protože cos je spojitý v 0 a $\cos(0) = 1$, snadno dostaneme, že

$$\lim_{x \to -\infty} f''(x) = 2 > 0.$$

Tedy existuje $b < 0$ takové, že $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, b)$. Z toho již snadno plyne, že f je konvexní na $(-\infty, b)$.

Příklad 3 (25 bodů)

K výpočtu teploty plynu po adiabatické expanzi použijeme Poissonův zákon a stavovou rovnici ideálního plynu.

Poissonův zákon má tvar:

$$pV^{\kappa} = konst,$$

kde p je tlak, V objem a κ je Poissonova konstanta.

Ze stavové rovnice ideálního plynu

$$\frac{pV}{T} = konst$$

vyjádříme tlak p a dosadíme do Poissonova zákona.

Po úpravě dostaneme:

$$TV^{\kappa-1} = konst.$$

Pří izotermickém stlačení se teplota nezmění. Platí tedy $T_1 = T_2$, kde T_2 je teplota vzduchu po jeho stlačení.

Pro následující expanzi přepíšeme Poissonův zákon $pV^{\kappa} = konst$ do tvaru:

$$V_2^{\kappa-1}T_2 = V_3^{\kappa-1}T_3$$

a vyjádříme z něj teplotu T_3:

$$T_3 = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\kappa-1} T_2.$$

Dosadíme zadané hodnoty objemů V_2, V_3 a získáme vztah pro teplotu T_3:

$$T_3 = \left(\frac{\frac{1}{5}V_1}{2V_1}\right)^{\kappa-1} T_2 = 0,1^{\kappa-1}T_2.$$

Celková práce W vykonaná plynem je rovna součtu práce W_1 vykonané při izotermickém stlačení a práce W_2 vykonané při adiabatické expanzi.

V případě, kdy tlak p není konstantní, počítáme práci podle vztahu

$$W = \int\limits_{V_p}^{V_k} p\left(V\right)\,\mathrm{d}V,$$

kde V_p a V_k jsou počáteční a konečný objem plynu.

V případě izotermického děje můžeme vyjádřit tlak p jako funkci objemu V pomocí Boyleova-Mariottova zákona:

$$p_1V_1 = pV \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{p_1V_1}{V}.$$

Dosadíme do vztahu pro práci

$$W_1 = \int\limits_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int\limits_{V_1}^{\frac{1}{5}V_1} \frac{p_1 V_1}{V}\,\mathrm{d}V,$$

zintegrujeme a dosadíme za horní a dolní mez. Výsledkem bude $W_1 = p_1 V_1 \ln \frac{1}{5}$.
V případě adiabatického děje vyjádříme pomocí Poissonova zákona tlak jako funkci objemu:

$$p_2 V_2^\kappa = p V^\kappa \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{p_2 V_2^\kappa}{V^\kappa}.$$

Takto vyjádřený tlak dosadíme do vzorce pro práci:

$$W_2 = \int\limits_{V_2}^{V_3} p\,\mathrm{d}V = \int\limits_{V_2}^{V_3} \frac{p_2 V_2^\kappa}{V^\kappa}\,\mathrm{d}V$$

Výpočtem po dosazení mezí získáme vztah pro práci W_2:

$$W_2 = \frac{p_2 V_2^\kappa}{-\kappa + 1}\left[(V_3)^{-\kappa+1} - (V_2)^{-\kappa+1}\right].$$

Z Boyleova-Mariottova zákona

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

vyjádříme p_2 jako

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{p_1 V_1}{\frac{1}{5} V_1} = 5 p_1.$$

Tento vztah společně se zadanými vztahy pro objemy V_2 a V_3 dosadíme do vzorce pro práci:

$$W_2 = \frac{5 p_1 \left(\frac{1}{5} V_1\right)^\kappa}{1 - \kappa}\left[(2V_1)^{1-\kappa} - \left(\frac{1}{5} V_1\right)^{1-\kappa}\right]$$

a dalšími úpravami získáme:

$$W_2 = \frac{p_1 V_1}{1 - \kappa} 5^{1-\kappa}\left[2^{1-\kappa} - \left(\frac{1}{5}\right)^{1-\kappa}\right],$$

$$W_2 = \frac{p_1 V_1}{1 - \kappa}\left[10^{1-\kappa} - 1\right].$$

Nakonec určíme celkovou práci plynu:

$$W = W_1 + W_2$$

$$W = p_1V_1 \ln\frac{1}{5} + \frac{p_1V_1}{1-\kappa}\left(10^{1-\kappa} - 1\right)$$

$$W = p_1V_1 \left[\ln\frac{1}{5} + \frac{1}{\kappa-1}\left(1 - 10^{1-\kappa}\right)\right].$$

Číselné vyjádření

Výsledná teplota:

$$T_3 = 0,1^{\kappa-1} \cdot T_2 = 0,1^{1,4-1} \cdot 273\,\mathrm{K} \doteq 109\,\mathrm{K}$$

Celková vykonaná práce:

$$W = p_1V_1 \left[\ln\frac{1}{5} + \frac{1}{\kappa-1}\left(1 - 10^{1-\kappa}\right)\right]$$

$$W = 10^5 \cdot 10^{-2} \cdot \left[\ln\frac{1}{5} + \frac{1}{1,4-1} \cdot \left(1 - 10^{1-1,4}\right)\right]\ \mathrm{J}$$

$$W \doteq -\,105\,\mathrm{J}$$

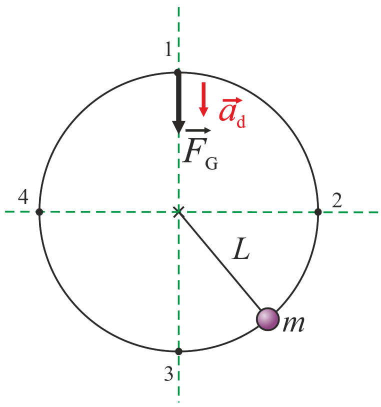
Odpověď:

Výsledná teplota je asi 109 K.

Plyn přijal práci přibližně 105 J.

Příklad 4 (25 bodů)

S využitím 2. Newtonova zákona zjistíme nejprve rychlost kuličky v nejvyšším bodě trajektorie. Rychlosti v dalších bodech určíme pomocí zákona zachování mechanické energie (ZZME). K určení síly, kterou je napínán provaz, použijeme 2. Newtonův zákon.



V nejvyšším bodě trajektorie působí na kuličku tíhová síla $\overrightarrow{F_G}$ a tahová síla $\overrightarrow{T_1}$ je podle zadání úlohy nulová.

Z pohybové rovnice pro kuličku, kterou lze napsat ve tvaru:

$$\vec{T_1} + \vec{F_G} = m\vec{a_d}. \tag{1}$$

vyplývá

$$mg = ma_d.$$

Vyjádříme normálové zrychlení kuličky:

$$a_d = \frac{v_1^2}{L},$$

kde v je rychlost kuličky, L délka provazu.

Drobnými úpravami najdeme vztah pro rychlost kuličky:

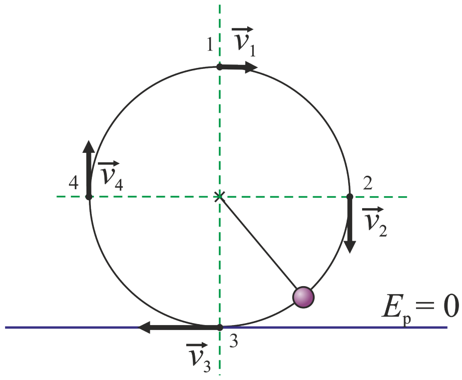
$$mg = m\frac{v_1^2}{L}$$

$$v_1 = \sqrt{gL}. \tag{2}$$

Při pohybu kuličky z bodu 1 do bodů 2, 3, 4 se mění její potenciální a kinetická energie. Předpokládáme, že přitom platí ZZME. Bodem 3 proložíme nulovou hladinu potenciální energie. Pomocí ZZME vyjádříme rychlost kuličky v jednotlivých bodech.

Např. rychlost v_2 určíme takto:

$$\text{ZZME}: \quad E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2},$$



$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mg2L = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgL,$$

ze vztahu (2) dosadíme za rychlost v_1:

$$\frac{1}{2}mgL + mg2L = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgL.$$

Rovnici vydělíme hmotností koule m, vynásobíme dvěma a vyjádříme rychlost v_2:

$$gL + 4gL = v_2^2 + 2gL,$$
$$3gL = v_2^2,$$

$$v_2 = \sqrt{3gL}. \tag{3}$$

Podobně určíme rychlosti v_3 a v_4:

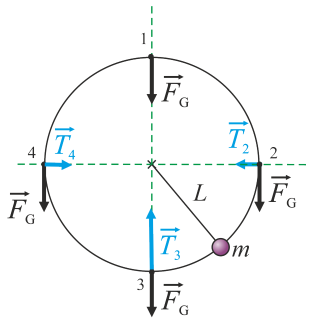
$$v_3 = \sqrt{5gL} \tag{4}$$
$$v_4 = \sqrt{3gL} \tag{5}$$

Nakreslíme do obrázku všechny síly, které působí na kuličku v bodech 2, 3 a 4. Napíšeme pohybové rovnice pro kuličku v těchto bodech a vyjádříme z nich hledané tahové síly. V nejvyšším bodě je podle zadání síla, kterou je napínán provaz, nulová.

$$T_1' = 0$$

Napíšeme pohybovou rovnici pro kuličku v bodě 2:

$$\vec{T_2} + \vec{F_G} = m\vec{a}.$$



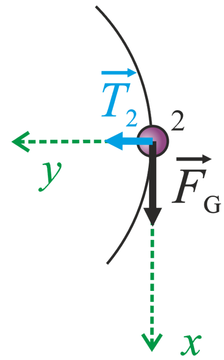
T_2 zde označuje sílu, kterou působí provaz na kuličku v bodě 2.

Přepíšeme pohybovou rovnici skalárně. Souřadný systém volíme tak, že osa x směřuje ve směru pohybu koule a osa y do středu kružnice (viz obrázek).

x-ová složka:

$$F_G = ma_t,$$

kde a_t je tečné zrychlení.



y-ová složka:

$$T_2 = ma_d,$$

kde a_d označuje normálové zrychlení. Velikost normálového zrychlení koule v bodě 2 je rovna:

$$a_d = \frac{v_2^2}{L},$$

$$T_2 = \frac{mv_2^2}{L} = \frac{m3gL}{L} = 3mg.$$

Tahová síla T_2', kterou je napínán provaz v bodě 2, je podle 3. Newtonova zákona stejně velká jako síla T_2 , kterou působí provaz na kuličku, ale opačného směru:

$$T_2' = T_2 = 3mg.$$

Analogická je situace v bodě 4. Protože je rychlost kuličky v bodech 2 a 4 stejně velká, je stejně velká i síla T_4, kterou na ni působí provaz a tedy i tahová síla T_4', kterou je provaz napínán.

$$T_4 = ma_d = \frac{mv_4^2}{L} = 3mg,$$

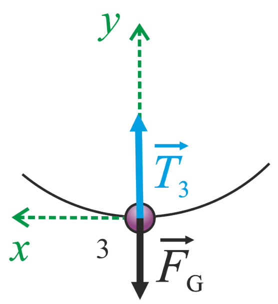
$$T_4' = T_4 = 3mg.$$

Pohybová rovnice pro kuličku v bodě 3 má tvar:

$$\vec{T_3} + \vec{F_G} = m\vec{a_d},$$

kde $\overrightarrow{T_3}$ je síla, kterou působí provaz na kuličku v bodě 3.

Přepíšeme pohybovou rovnici skalárně. Souřadný systém volíme tak, že osa x směřuje ve směru pohybu kuličku a osa y do středu kružnice (viz obrázek).



$$T_3 - F_G = ma_d$$

$$T_3 - F_G = m\frac{v_3^2}{L}$$

$$T_3 - mg = m\frac{5gL}{L}$$

$$T_3 = 6mg$$

Podle 3. Newtonova zákona opět platí, že síla T_3', kterou je napínán provaz v bodě 3, je stejně velká jako síla T_3, kterou působí provaz na kuličku, ale má opačný směr:

$$T_3' = T_3 = 6mg.$$

Odpověď:

V nejvyšším bodě je velikost rychlosti kuličky rovna $v_1 = \sqrt{gL}$ a síla, kterou je provaz v tomto bodě napínán, je nulová.

V bodech 2 a 4 je velikost rychlosti kuličky rovna $v_2 = v_4 = \sqrt{3gL}$ a velikost síly, kterou je provaz napínán, je rovna $T_2' = T_4' = 3mg$.

V bodě 3 je velikost rychlosti kuličky rovna $v_3 = \sqrt{5gL}$ a velikost síly, kterou je provaz napínán, je rovna $T_3' = 6mg$.