Informatika – navazující magisterské studium
Přijímací zkouška z informatiky – 2016 – varianta A

Každá úloha je hodnocena maximálně 25 body.
Všechny své odpovědi zdůvodněte!

1. Určete, kolik sudých číslic napíšete, jestliže zapíšete za sebou prvních 2000 kladných celých čísel.

2. Převeďte do disjunktivní normální formy následující logickou formuli:

((~x & y) ∨ (x & ~z)) & (~x ∨ y)

Znaky x, y, z označují logické proměnné, znak & představuje logickou spojku konjunkce, znak ∨ označuje disjunkci, symbolem ~x značíme negaci proměnné x.

a) Nalezněte jakékoliv řešení.
b) Nalezněte řešení ve tvaru disjunkce tvořené nejvýše dvěma členy.

3. Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou {0, 1}, který přijímá všechna taková slova, která obsahují právě dva znaky 0 a končí dvojicí stejných znaků. Například slova 00, 01011, 1111100 automat přijme, zatímco slova 11, 000111, 10101 nepřijme. Přechodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít minimální počet stavů.

4. Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```
program A;
var N, X: integer;
begin
  read(N);
  X := 0;
  while N > 1 do
    begin
    X := X * 2 + N mod 2;
    N := N div 2
    end;
  write(X)
end.
```

```
main() /* A */
{
  int n, x;
  scanf( "%d", &n);
  x = 0;
  while (n > 1)
  {
    x = x * 2 + n % 2;
    n /= 2;
  }
  printf( "%d", x);
}
```

a) Určete, pro kterou nejmenší vstupní hodnotu *N* je výsledkem číslo *X* = 77.
b) Určete tři nejmenší vstupní hodnoty *N*, pro které je výsledkem dvouciferné číslo.
c) Určete všechny vstupní hodnoty *N*, pro které je výsledek výpočtu roven vstupní hodnotě, tzn. platí *X* = *N*.

Řešení přijímací zkoušky z informatiky – 2016 – varianta A

1. Každé druhé číslo končí sudou číslicí, takže napíšeme celkem 1000 sudých číslic na pozici jednotek. Každé druhé číslo má sudou číslici na pozici desítek, což znamená dalších 1000 sudých číslic na pozici desítek. Neexistují ale dvouciferná sudá čísla 01, 02, …, 09, která jsme tím započítali, takže sudých číslic na pozici desítek napíšeme ve skutečnosti jenom 991. Z čísel 100 až 999 má 400 sudou číslici na pozici stovek, z čísel 1000 až 1999 jich tam má sudou číslici 500. Zbývá číslo 2000, ve kterém je jedna sudá číslice na pozici stovek a jedna na pozici tisíců. Celkem tedy napíšeme 1000+991+400+500+2 = **2893** sudých číslic.

2. Zadanou logickou formuli upravíme:

$$((\sim x \ \& \ y) \lor (x \ \& \sim z)) \ \& \ (\sim x \lor y)$$

$$(\sim x \ \& \ y \ \& \ (\sim x \lor y)) \lor (x \ \& \sim z \ \& \ (\sim x \lor y))$$

$$(\sim x \,\&\, y \,\&\sim x) \lor (\sim x \,\&\, y \,\&\, y) \lor (x \,\&\sim z \,\&\sim x) \lor (x \,\&\sim z \,\&\, y)$$

Postupnými úpravami tak dostaneme výsledný tvar

$$\mathbf{(\sim x \ \& \ y) \lor (x \ \& \ y \ \& \sim z)}$$

Správný je rovněž tvar

$$\mathbf{(\sim x \ \& \ y) \lor (y \ \& \sim z)}$$

Můžeme také postupovat pomocí tabulky logických hodnot, do níž vypíšeme všech 8 možností pro hodnoty logických proměnných x, y, z. Formuli v disjunktivní normální formě pak získáme jako disjunkci těch sloupců tabulky, v nichž nabývá zadaná formule pravdivostní hodnoty 1. Rychle a přímočaře totéž řešení získáme pomocí Karnaughovy mapy.

3. Pomocí stavů automatu musíme počítat počet nul na vstupu a evidovat poslední dva znaky vstupního slova. V počátečním stavu A nebyla přečtena žádná 0, ve stavech B, C byla přečtena jedna 0 a slovo zatím končí na 0 resp. 1, ve stavech D, E, F, G byly přečteny právě dvě nuly a vstupní slovo končí na 00, 01, 10 resp. 11, ve stavu H byly přečteny tři nebo více nul (pak už není zajímavé, čím vstupní slovo končí). Minimalitu počtu stavů ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	0	1	
→ A	B	A	počáteční stav
B	D	C	přečtena jedna 0, slovo končí 0
C	F	C	přečtena jedna 0, slovo končí 1
← D	H	E	přečteny dvě 0, slovo končí 00
E	H	G	přečteny dvě 0, slovo končí 01
F	H	E	přečteny dvě 0, slovo končí 10
← G	H	G	přečteny dvě 0, slovo končí 11
H	H	H	přečteny aspoň tři 0

4. Pro nekladné vstupní hodnoty je výsledkem 0. Pro kladná N dostaneme binární zápis čísla X převrácením pořadí cifer v binárním zápisu čísla N, přičemž se ze zápisu čísla N vynechá vedoucí cifra 1 a všechny (případné) koncové cifry 0.

a) Binární zápis čísla 77 je 1001101, získáme ho uvedeným postupem ze zápisu 11011001, což je číslo **217** (a také z jeho násobků mocninou dvojky, tzn. 434, 868, …).

b) Dvouciferný výsledek musí mít aspoň čtyři cifry v binárním zápisu: 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111. Vyšší čísla již mají binární zápis delší, což znamená také vyšší vstupní hodnotu. Uvedené možné výsledky získáme ze vstupních hodnot po řadě 10101, 11101, 10011, 11011, 10111, 11111, což jsou čísla 21, 29, 19, 27, 23, 31. Hledané tři nejmenší hodnoty tedy jsou **19, 21, 23.**

c) Pro N záporné je výsledek 0, tedy odlišný. Pro N=0 je výsledkem 0. Pro N kladné má výsledné číslo kratší binární zápis, takže je vždy menší než vstupní hodnota. Vyhovuje proto pouze N=0.

Informatika – navazující magisterské studium
Přijímací zkouška z informatiky – 2016 – varianta B

Každá úloha je hodnocena maximálně 25 body.
Všechny své odpovědi zdůvodněte!

1. Určete, kolik lichých číslic napíšete, jestliže zapíšete za sebou prvních 2016 kladných celých čísel.

2. Převeďte do disjunktivní normální formy následující logickou formuli:

$$\sim (\sim y \vee (\sim x \,\&\, y \,\&\, z))$$

Znaky x, y, z označují logické proměnné, znak & představuje logickou spojku konjunkce, znak $\vee$ označuje disjunkci, symbolem $\sim x$ značíme negaci proměnné x.

a) Nalezněte jakékoliv řešení.
b) Nalezněte řešení ve tvaru disjunkce tvořené nejvýše dvěma členy.

3. Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou {0, 1}, který přijímá všechna taková slova, která obsahují lichý počet znaků 0 a končí dvojicí stejných znaků. Například slova 011, 000, 00111011 automat přijme, zatímco slova 111, 1100, 101010 nepřijme. Přechodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít minimální počet stavů.

4. Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```
program B;
var N, X, Y: integer;
begin
  read(N);
  X := 0;
  while N > 0 do
    begin
    X := X * 2 + N mod 2;
    N := N div 2
    end;
  Y := 0;
  while X > 0 do
    begin
    Y := Y * 2 + X mod 2;
    X := X div 2
    end;
  write(Y)
end.
```

```
main() /* B */
{
  int n, x, y;
  scanf( "%d", &n);
  x = 0;
  while (n > 0)
  {
    x = x * 2 + n % 2;
    n /= 2;
  }
  y = 0;
  while (x > 0)
  {
    y = y * 2 + x % 2;
    x /= 2;
  }
  printf( "%d", y);
}
```

a) Určete, pro kterou nejmenší vstupní hodnotu *N* je výsledkem číslo *Y* = 100.
b) Určete, pro kterou vstupní hodnotu *N* je výsledkem číslo *Y* = 77. Nalezněte tři nejmenší různá taková *N* (pokud existují).
c) Určete, pro kolik různých vstupních hodnot *N* menších než 1000 je výsledek výpočtu roven vstupní hodnotě, tzn. platí *Y* = *N*.

Řešení přijímací zkoušky z informatiky – 2016 – varianta B

1. Představme si, že čísla menší než 1000 doplníme vedoucími nulami na čtyřciferná čísla. Tyto nuly napsané navíc nejsou liché číslice, takže počet napsaných lichých číslic toto doplnění nijak neovlivní. Z čísel 0001, 0002, …, 2000 jich má přesně polovina lichou číslici na pozici jednotek, polovina má lichou číslici na pozici desítek, polovina na pozici stovek a polovina na pozici tisíců. Máme tedy napsáno 1000 lichých číslic na každé ze čtyř řádových pozic, tzn. celkem 4000 lichých číslic. Zbývá doplnit čísla 2001, …, 2016. Počet lichých číslic v nich již snadno doplníme výčtem: 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 napíšeme pomocí 15 lichých číslic. Celkově proto napíšeme **4015** lichých číslic.

2. Zadanou logickou formuli upravíme, využijeme přitom de Morganova pravidla:

$$\sim(\sim y \vee (\sim x \;\&\; y \;\&\; z))$$
$$y \;\&\; (x \vee \sim y \vee \sim z)$$
$$(x \& y) \vee (y \;\&\; \sim y) \vee (y \& \sim z)$$

Postupnými úpravami tak dostaneme výsledný tvar

$$\mathbf{(x \& y) \vee (y \& \sim z)}$$

Můžeme také postupovat pomocí tabulky logických hodnot, do níž vypíšeme všech 8 možností pro hodnoty logických proměnných x, y, z. Formuli v disjunktivní normální formě pak získáme jako disjunkci těch sloupců tabulky, v nichž nabývá zadaná formule pravdivostní hodnoty 1. Rychle a přímočaře totéž řešení získáme pomocí Karnaughovy mapy.

3. Pomocí stavů automatu budeme určovat paritu počtu nul přečtených ze vstupu a evidovat poslední znaky vstupního slova. Ve stavech A, B byl přečten sudý počet znaků 0 a vstupní slovo zatím končí na 1 resp. 0 (stav A je navíc počátečním stavem). Ve stavech C, D, E, F byl přečten lichý počet znaků 0 a vstupní slovo končí na 10, 01, 00 resp. 11 (zde potřebujeme znát posední dva znaky kvůli rozlišení koncových stavů). Minimalitu počtu stavů ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	0	1	
→ A	C	A	přečten sudý počet 0, slovo končí 1
B	E	A	přečten sudý počet 0, slovo končí 0
C	B	D	přečten lichý počet 0, slovo končí 10
D	B	F	přečten lichý počet 0, slovo končí 01
← E	B	D	přečten lichý počet 0, slovo končí 00
← F	B	F	přečten lichý počet 0, slovo končí 11

4. Každý z cyklů zrcadlově převrátí binární zápis čísla, přičemž se ztratí všechny případné koncové nuly. Výsledné číslo Y se tedy liší od vstupního čísla N tím, že je vyděleno maximální mocninou dvojky, kterou je dělitelné. Kladná lichá vstupní čísla tudíž zůstávají beze změn, kladná sudá se zmenší. Pro všechny nekladné vstupní hodnoty je výsledkem 0.

a) Pro nekladné vstupní hodnoty je výsledkem 0, pro kladné vstupní hodnoty je výsledkem vždy liché číslo, takže výsledek 100 nedostaneme pro **žádnou** vstupní hodnotu.

b) Podle výše uvedeného vysvětlení to jsou vstupní hodnoty **77**, 2.77=**154**, 4.77=**308**.

c) Z nekladných vstupních hodnot nastává shoda pouze pro 0. Z kladných vstupních hodnot se výsledek rovná vstupní hodnotě pro všechna lichá čísla, kterých je do tisíce přesně 500. Celkem tedy vyhovuje **501** různých vstupních hodnot.