

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2016

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Příklad 1 (25 bodů)

Odůvodněte, proč existuje integrál

$$\int_M \frac{x^2 z}{y^2} dx dy dz,$$

kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 < x < 2, 0 < y < x^2 - 1, 0 < z < 2y\}$. Spočtěte ho.

Příklad 2 (25 bodů)

Definujme funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 y + x y^2 - y^3}.$$

Určete její totální diferenciál všude, kde existuje. V bodech, kde neexistuje, odůvodněte proč.

Příklad 3 (25 bodů)

Uvažujme náhodný výběr $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ z rozdělení s hustotou

$$f(x, y; \beta) = \beta x \exp\{-\beta xy\} \mathcal{I}\{x \in (0, 1), y > 0\}, \quad \beta > 0.$$

- Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr $\beta > 0$.
- Odvodte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu pro neznámý parametr β .
- Sestavte
 - test poměrem věrohodnosti,
 - Raoův skórový test,
 - Waldův test

pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$.

Příklad 4 (25 bodů)

Uvažujte dluhopis s nominální hodnotou F , roční kupónovou sazbou c , splatností n let a tržní cenou P . Nechť i je oceňovací úroková míra.

- Co je spravedlivá cena (počáteční hodnota PV) tohoto dluhopisu?
- Napište rovnici pro výpočet výnosnosti do splatnosti i^* (YTM) tohoto dluhopisu.
- Dokažte tvrzení: $P < F$ (tzv. prodej pod par), právě když $i^* > c$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2016

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Integrál existuje, protože integrujeme měřitelnou, nezápornou funkci přes měřitelnou množinu. Můžeme použít Fubiniho větu. Je pro nás výhodné psát

$$\begin{aligned} M = M_1 \cup M_2 &= \{-2 < x < -1, 0 < y < x^2 - 1, 0 < z < 2y\} \\ &\cup \{1 < x < 2, 0 < y < x^2 - 1, 0 < z < 2y\}. \end{aligned}$$

Nyní

$$\begin{aligned} \int_{M_1} \frac{x^2 z}{y^2} dx dy dz &= \int_{-2}^{-1} \left(\int_0^{x^2-1} \left(\int_0^{2y} \frac{x^2 z}{y^2} dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \left(\int_0^{x^2-1} \frac{x^2}{y^2} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{2y} dy \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left(\int_0^{x^2-1} 2x^2 dy \right) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} 2x^4 - 2x^2 dx = \left[\frac{2}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-2}^{-1} = \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) - \left(-\frac{64}{5} + \frac{16}{3} \right) \\ &= \frac{62}{5} - \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Velmi podobný výpočet vede na

$$\int_{M_2} \frac{x^2 z}{y^2} dx dy dz = \frac{62}{5} - \frac{14}{3}$$

Proto

$$\int_M \frac{x^2 z}{y^2} dx dy dz = \frac{124}{5} - \frac{28}{3}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Protože $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2)$, na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = y\}$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{3(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)^{\frac{2}{3}}}$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-x^2 + 2xy - 3y^2}{3(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Obě parciální derivace jsou spojité na uvažované množině. Proto zde totální diferenciál existuje a splňuje

$$df(x, y)(h_1, h_2) = \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{3(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)^{\frac{2}{3}}}h_1 + \frac{-x^2 + 2xy - 3y^2}{3(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)^{\frac{2}{3}}}h_2.$$

Dále na množině $\{(x, x) : x \neq 0\}$ máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, x) - f(x, x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(x+t)^3 - (x+t)^2x + (x+t)x^2 - x^3} - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{(x+t)^2t + x^2t}{t^3}} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{2x^2 + 2xt + t^2}{t^2}} = \infty. \end{aligned}$$

Proto zde totální diferenciál neexistuje. Zbývá vyšetřit chování v počátku. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^3}}{t} = 1$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{-t^3}}{t} = -1.$$

Proto jediným kandidátem na totální diferenciál je lineární funkce $L: (h_1, h_2) \mapsto h_1 - h_2$. Ověřme, zda splňuje definici totálního diferenciálu

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0, 0) - L(h_1, h_2)}{\|h\|} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h_1^3 - h_1^2h_2 + h_1h_2^2 - h_2^3} - h_1 + h_2}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Tato limita se však nerovná nule, protože pro $h_2 = -h_1 < 0$ máme

$$\frac{\sqrt[3]{h_1^3 - h_1^2h_2 + h_1h_2^2 - h_2^3} - h_1 + h_2}{\|h\|} = \frac{\sqrt[3]{4h_1^3} - 2h_1}{\sqrt{2h_1^2}} = \frac{\sqrt[3]{4} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Proto totální diferenciál v počátku neexistuje.

Příklad 3 (25 bodů)

(a) Nejdříve vyjádříme věrohodnost

$$L_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \beta^n \prod_{i=1}^n X_i \exp \left\{ -\beta \sum_{i=1}^n X_i Y_i \right\}, \quad X_i \in (0, 1), Y_i > 0, \forall i.$$

Logaritmická věrohodnost je pak

$$l_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = n \log \beta + \sum_{i=1}^n \log X_i - \beta \sum_{i=1}^n X_i Y_i.$$

Následně zderivováním dostaneme skórovou statistiku

$$U_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n X_i Y_i.$$

Maximálně věrohodný odhad je řešením věrohodnostní rovnice $\partial l_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) / \partial \beta = 0$ vzhledem k neznámému parametru β , tj.

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}.$$

Pozorovaná (výběrová) informační matice je

$$I_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = -\frac{1}{n} \frac{\partial U_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta^2},$$

která po vyčíslení v maximálně věrohodném odhadu nabývá kladné hodnoty

$$I_n(\hat{\beta}; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n} \right)^2 > 0.$$

Tím pádem je nalezený maximálně věrohodný odhad právě jeden.

(b) Fisherovu informační matici spočítáme jako

$$I(\beta) = \mathbb{E} I_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \frac{1}{\beta^2}.$$

Pak platí, že

$$\sqrt{n} (\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \beta^2), \quad n \rightarrow \infty.$$

(c,i) Test podílem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$ je založen na testové statistice

$$D_n = 2 \log \frac{L_n(\hat{\beta}; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])}{L_n(\beta_0; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])} = 2n \log \frac{n}{\beta_0 \sum_{i=1}^n X_i Y_i} - 2 \left(n - \beta_0 \sum_{i=1}^n X_i Y_i \right)$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1 , když $D_n > \chi_1^2(1 - \alpha)$, kde $\chi_1^2(1 - \alpha)$ je $(1 - \alpha)$ -kvantil χ^2 rozdělení o jedném stupni volnosti.

(c,ii) Raoův skórový test pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$ je založen například na testové statistice

$$R_n = \frac{[U_n(\beta_0; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])]^2}{nI(\beta_0)} = \frac{1}{n} \left(n - \beta_0 \sum_{i=1}^n X_i Y_i \right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1 , když $R_n > \chi_1^2(1 - \alpha)$.

(c,iii) Waldův test pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$ je založen například na testové statistice

$$W_n = n \left(\hat{\beta} - \beta_0 \right)^2 I(\hat{\beta}) = \frac{1}{n} \left(n - \beta_0 \sum_{i=1}^n X_i Y_i \right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1 , když $W_n > \chi_1^2(1 - \alpha)$.

Příklad 4 (25 bodů)

(i) Spravedlivá cena je počáteční hodnota všech finančních toků spojených s daným dluhopisem:

$$PV = \frac{C}{1+i} + \cdots + \frac{C}{(1+i)^{n-1}} + \frac{C+F}{(1+i)^n}.$$

(ii) Rovnice má tvar

$$P = \frac{cF}{1+i^*} + \cdots + \frac{cF}{(1+i^*)^{n-1}} + \frac{cF+F}{(1+i^*)^n}$$

nebo

$$P = cFv^* + \cdots + cF(v^*)^n + F(v^*)^n$$

nebo

$$P = F \left[c \frac{1 - (v^*)^n}{i^*} + (v^*)^n \right]$$

nebo

$$P = F [ca_{\bar{n}i^*} + (v^*)^n],$$

kde $v^* = \frac{1}{1+i^*}$, $a_{\bar{n}i^*} = \frac{1-(v^*)^n}{i^*}$.

(iii) Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} P &= F \left[c \frac{1 - (v^*)^n}{i^*} + (v^*)^n \right] \\ \frac{P}{F} - 1 &= \frac{c}{i^*} [1 - (v^*)^n] - [1 - (v^*)^n] \\ \frac{P}{F} - 1 &= \left(\frac{c}{i^*} - 1 \right) [1 - (v^*)^n]. \end{aligned}$$

Protože $1 - (v^*)^n > 0$, plyne odtud, že

$$\frac{P}{F} - 1 < 0 \quad \text{právě když} \quad \frac{c}{i^*} - 1 < 0.$$