Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2016

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Příklad 1 (25 bodů)

Odůvodněte, proč existuje integrál

$$\int_M \frac{x^2 z}{y^2}\, dxdydz,$$

kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon -2 < x < 2, 0 < y < x^2 - 1, 0 < z < 2y\}$. Spočtěte ho.

Příklad 2 (25 bodů)

Definujme funkci $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 y + x y^2 - y^3}.$$

Určete její totální diferenciál všude, kde existuje. V bodech, kde neexistuje, odůvodněte proč.

Příklad 3 (25 bodů)

Uvažujme náhodný výběr $(X_1, Y_1)^\top, \ldots, (X_n, Y_n)^\top$ z rozdělení s hustotou

$$f(x, y; \beta) = \beta x \exp\{-\beta x y\}\, \mathcal{I}\{x \in (0, 1), y > 0\}, \quad \beta > 0.$$

(a) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr $\beta > 0$.

(b) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu pro neznámý parametr β.

(c) Sestavte

(i) test poměrem věrohodnosti,

(ii) Raoův skórový test,

(iii) Waldův test

pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$.

Příklad 4 (25 bodů)

Uvažujte dluhopis s nominální hodnotou F, roční kupónovou sazbou c, splatností n let a tržní cenou P. Nechť i je oceňovací úroková míra.

(i) Co je spravedlivá cena (počáteční hodnota PV) tohoto dluhopisu?

(ii) Napište rovnici pro výpočet výnosnosti do splatnosti i^* (YTM) tohoto dluhopisu.

(iii) Dokažte tvrzení: $P < F$ (tzv. prodej pod par), právě když $i^* > c$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2016

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Integrál existuje, protože integrujeme měřitelnou, nezápornou funkci přes měřitelnou množinu. Můžeme použít Fubiniho větu. Je pro nás výhodné psát

$$\begin{aligned} M = M_1 \cup M_2 = &\{-2 < x < -1, 0 < y < x^2 - 1, 0 < z < 2y\} \\ &\cup \{1 < x < 2, 0 < y < x^2 - 1, 0 < z < 2y\}\ . \end{aligned}$$

Nyní

$$\begin{aligned} \int_{M_1} \frac{x^2 z}{y^2}\, dxdydz &= \int_{-2}^{-1} \Big(\int_0^{x^2-1} \Big(\int_0^{2y} \frac{x^2 z}{y^2}\, dz \Big)\, dy \Big)\, dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \Big(\int_0^{x^2-1} \frac{x^2}{y^2} \Big[\frac{z^2}{2} \Big]_0^{2y}\, dy \Big)\, dx = \int_{-2}^{-1} \Big(\int_0^{x^2-1} 2x^2\, dy \Big)\, dx \\ &= \int_{-2}^{-1} 2x^4 - 2x^2\, dx = \Big[\frac{2}{5} x^5 - \frac{2}{3} x^3 \Big]_{-2}^{-1} = \Big(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \Big) - \Big(-\frac{64}{5} + \frac{16}{3} \Big) \\ &= \frac{62}{5} - \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Velmi podobný výpočet vede na

$$\int_{M_2} \frac{x^2 z}{y^2}\, dxdydz = \frac{62}{5} - \frac{14}{3}$$

Proto

$$\int_{M} \frac{x^2 z}{y^2}\, dxdydz = \frac{124}{5} - \frac{28}{3}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Protože $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = (x-y)(x^2+y^2)$, na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = y\}$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{3(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)^{\frac{2}{3}}}$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2 + 2xy - 3y^2}{3(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Obě parciální derivace jsou spojité na uvažované množině. Proto zde totální diferenciál existuje a splňuje

$$df(x,y)(h_1,h_2) = \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{3(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)^{\frac{2}{3}}}h_1 + \frac{-x^2 + 2xy - 3y^2}{3(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)^{\frac{2}{3}}}h_2.$$

Dále na množině $\{(x,x) \colon x \neq 0\}$ máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,x) - f(x,x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{(x+t)^3 - (x+t)^2x + (x+t)x^2 - x^3} - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \sqrt[3]{\frac{(x+t)^2t + x^2t}{t^3}} = \lim_{t\to 0} \sqrt[3]{\frac{2x^2 + 2xt + t^2}{t^2}} = \infty.\end{aligned}$$

Proto zde totální diferenciál neexistuje. Zbývá vyšetřit chování v počátku. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^3}}{t} = 1$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{-t^3}}{t} = -1.$$

Proto jediným kandidátem na totální diferenciál je lineární funkce $L \colon (h_1,h_2) \mapsto h_1 - h_2$. Ověřme, zda splňuje definici totálního diferenciálu

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - L(h_1,h_2)}{\|h\|} \\ &\qquad\qquad = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h_1^3 - h_1^2h_2 + h_1h_2^2 - h_2^3} - h_1 + h_2}{\|h\|}.\end{aligned}$$

Tato limita se však nerovná nule, protože pro $h_2 = -h_1 < 0$ máme

$$\frac{\sqrt[3]{h_1^3 - h_1^2h_2 + h_1h_2^2 - h_2^3} - h_1 + h_2}{\|h\|} = \frac{\sqrt[3]{4h_1^3} - 2h_1}{\sqrt{2h_1^2}} = \frac{\sqrt[3]{4} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Proto totální diferenciál v počátku neexistuje.

Příklad 3 (25 bodů)

(a) Nejdříve vyjádříme věrohodnost

$$L_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \beta^n \prod_{i=1}^{n} X_i \exp\left\{-\beta \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right\}, \quad X_i \in (0,1),\, Y_i > 0,\, \forall i.$$

Logaritmická věrohodnost je pak

$$l_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = n \log \beta + \sum_{i=1}^{n} \log X_i - \beta \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i.$$

Následně zderivováním dostaneme skórovou statistiku

$$U_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i.$$

Maximálně věrohodný odhad je řešením věrohodnostní rovnice $\partial l_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])/\partial \beta = 0$ vzhledem k neznámému parametru β, tj.

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}.$$

Pozorovaná (výběrová) informační matice je

$$I_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = -\frac{1}{n} \frac{\partial U_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta^2},$$

která po vyčíslení v maximálně věrohodném odhadu nabývá kladné hodnoty

$$I_n(\hat{\beta}; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n}\right)^2 > 0.$$

Tím pádem je nalezený maximálně věrohodný odhad právě jeden.

(b) Fisherovu informační matici spočítáme jako

$$I(\beta) = \mathsf{E} I_n(\beta; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \frac{1}{\beta^2}.$$

Pak platí, že

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta} - \beta\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{N}\left(0, \beta^2\right), \quad n \to \infty.$$

(c,i) Test podílem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$ je založen na testové statistice

$$D_n = 2 \log \frac{L_n(\hat{\beta}; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])}{L_n(\beta_0; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])} = 2n \log \frac{n}{\beta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i} - 2\left(n - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $D_n > \chi^2_1(1-\alpha)$, kde $\chi^2_1(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti.

(c,ii) Raoův skórový test pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$ je založen například na testové statistice

$$R_n = \frac{[U_n(\beta_0; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])]^2}{nI(\beta_0)} = \frac{1}{n}\left(n - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $R_n > \chi_1^2(1-\alpha)$.

(c,iii) Waldův test pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$ je založen například na testové statistice

$$W_n = n\left(\hat{\beta} - \beta_0\right)^2 I\left(\hat{\beta}\right) = \frac{1}{n}\left(n - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $W_n > \chi_1^2(1-\alpha)$.

Příklad 4 (25 bodů)

(i) Spravedlivá cena je počáteční hodnota všech finančních toků spojených s daným dluhopisem:

$$PV = \frac{C}{1+i} + \cdots \frac{C}{(1+i)^{n-1}} + \frac{C+F}{(1+i)^n}.$$

.

(ii) Rovnice má tvar

$$P = \frac{cF}{1+i^*} + \cdots + \frac{cF}{(1+i^*)^{n-1}} + \frac{cF+F}{(1+i^*)^n}$$

nebo

$$P = cFv^* + \cdots + cF(v^*)^n + F(v^*)^n$$

nebo

$$P = F\left[c\frac{1-(v^*)^n}{i^*} + (v^*)^n\right]$$

nebo

$$P = F\left[ca_{\overline{n}|i^*} + (v^*)^n\right],$$

kde $v^* = \frac{1}{1+i^*}$, $a_{\overline{n}|i^*} = \frac{1-(v^*)^n}{i^*}$.

(iii) Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} P &= F\left[c\frac{1-(v^*)^n}{i^*} + (v^*)^n\right] \\ \frac{P}{F} - 1 &= \frac{c}{i^*}\left[1-(v^*)^n\right] - \left[1-(v^*)^n\right] \\ \frac{P}{F} - 1 &= \left(\frac{c}{i^*} - 1\right)\left[1-(v^*)^n\right]. \end{aligned}$$

Protože $1-(v^*)^n > 0$, plyne odtud, že

$$\frac{P}{F} - 1 < 0 \qquad \text{právě když} \qquad \frac{c}{i^*} - 1 < 0.$$