Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2016

Studijní program: Fyzika
Studijní obory: FFUM

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

- Sečtěte $\sum_{k=1}^{n^n} k$.
- S použitím věty o dvou policajtech spočtěte limitu posloupnosti a_n pro n jdoucí do nekonečna, kde

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\sum_{k=1}^{n^n} k}{\sum_{k=1}^{2n} k^k}}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

- Rozhodněte, zda množina bodů $[x, y, z, w] \in \mathbb{R}^4$, které splňují vztah

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4w^2 = 10xyzw$$

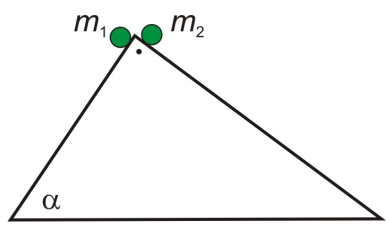
  je v okolí bodu $[1, 1, 1, 1]$ popsatelná jako graf spojitě diferencovatelné funkce $f(x, z, w)$ ($f(x, z, w) = y$) definované na jistém okolí bodu $[1, 1, 1]$, pro kterou je $f(1, 1, 1) = 1$.

- Spočtěte parciální derivaci složené funkce $T(x, z, w) = f(f(x, z, w), f(x, z, w), f(x, z, w))$ podle z v bodě $[1, 1, 1]$.

Pokud používáte větu o implicitních funkcích, tak ověřte její předpoklady.

Příklad 3 (25 bodů)

V homogenním tíhovém poli jsou umístěny dvě nakloněné roviny, navzájem kolmé, stýkající se horními okraji. Jedna z rovin svírá s vodorovnou podložkou úhel α. Ve stejný okamžik vypustíme ze společné hrany na opačné strany dvě koule o hmotnostech m_1, m_2 a poloměru R. Určete, jak se s časem mění poloha těžiště soustavy těchto dvou koulí. Úlohu řešte:



1. Se zanedbáním momentu setrvačnosti koulí.
2. Se započtením momentu setrvačnosti koulí.

Příklad 4 (25 bodů)

Dlouhým solenoidem, ležícím ve vakuu, s hustotou 10 závitů na centimetr a poloměrem 7 cm protéká proud 20 mA. Přímým vodičem ležícím v ose solenoidu protéká proud 6 A.

a) Pomocí Ampérova zákona určete průběh magnetické indukce v okolí dlouhého přímého vodiče a uvnitř solenoidu.

b) V jaké vzdálenosti od osy solenoidu bude svírat vektor celkové magnetické indukce úhel $45°$ s osou vodiče? Jaká je v tomto místě velikost magnetické indukce B?

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2016

Studijní program: Fyzika
Studijní obory: FFUM

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

- Jedná se o součet aritmetické posloupnosti. Tedy

$$\sum_{k=1}^{n^n} k = \frac{1}{2}(n^n + 1)n^n.$$

- Budeme používat větu o dvou policajtech. Využijeme následující odhady pro $n \in \mathbb{N}$

$$(2n)^{2n} \leq \sum_{k=1}^{2n} k^k \leq 2n(2n)^{2n},$$

$$\frac{1}{2}n^{2n} \leq \frac{1}{2}(n^n + 1)n^n \leq n^{2n}.$$

Tedy

$$\frac{1}{4}\sqrt[n]{\frac{1}{4n}} = \sqrt[n]{\frac{\frac{1}{2}n^{2n}}{2n(2n)^{2n}}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(2n)^{2n}}} = \frac{1}{4}.$$

Víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4n}} = 1.$$

Z věty o dvou policajtech a výše zmíněných odhadů a výpočtů plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

(1) Ověříme předpoklady věty o implicitních funkcích pro vztah

$$F(x, y, z, w) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4w^2 - 10xyzw = 0$$

a bod $[1, 1, 1, 1]$.

- F je polynom, tedy $F \in C^1(\mathbb{R}^4)$.
- $F(1, 1, 1, 1) = 0$.
- $F_y(1, 1, 1, 1) = -6 \neq 0$, tedy f existuje a je C^1.

(2)

$$f_x(1, 1, 1) = -\frac{F_x(1, 1, 1, 1)}{F_y(1, 1, 1, 1)} = -\frac{4}{3},$$

$$f_z(1, 1, 1) = -\frac{F_z(1, 1, 1, 1)}{F_y(1, 1, 1, 1)} = -\frac{2}{3},$$

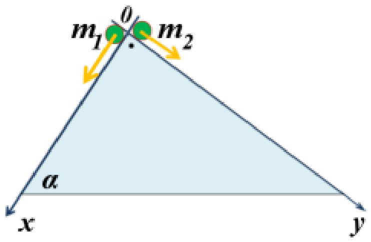
$$f_w(1, 1, 1) = -\frac{F_w(1, 1, 1, 1)}{F_y(1, 1, 1, 1)} = -\frac{1}{3}.$$

Použitím řetízkového pravidla dostáváme

$$T_z(1, 1, 1) = ((f_x + f_z + f_w)f_z)(1, 1, 1) = \frac{14}{9}.$$

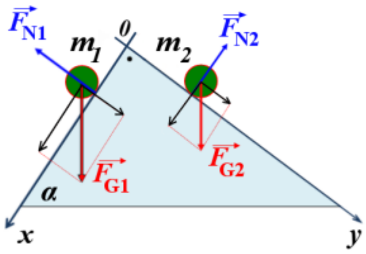
Příklad 3 (25 bodů)

Zanedbáváme-li v úloze moment setrvačnosti koulí, lze koule nahradit hmotnými body. Vhodné umístění problému do souřadného systému ukazuje obrázek níže.



Uvažujeme, že pohyb probíhá v rovině xy, uvažovat změnu z-ové souřadnice tedy nemusíme. Řešením má být nalezení předpisu, který popisuje závislost vývoje souřadnic těžiště x_T, y_T na čase.

Na obě koule působí tíhová síla a tlaková síla podložky. Jejich výslednice udílí kouli o hmotnosti m_1 zrychlení ve směru osy x a kouli o hmotnosti m_2 zrychlení ve směru osy y (viz následující obrázek).



Podle 2. Newtonova zákona platí pro kouli o hmotnosti m_1

$$\vec{F}_{G1} + \vec{F}_{N1} = m_1\vec{a}_1.$$

Tuto rovnici rozepíšeme do složek:

Směr osy x:

$$F_{G1} \sin\alpha = m_1 a_1,$$

směr osy y:

$$F_{G1} \cos\alpha - F_{N1} = 0.$$

Dosazením za velikost tíhové síly dostáváme z předchozích vztahů:

$$m_1 g \sin\alpha = m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = g \sin\alpha.$$

Také koule o hmotnosti m_2 se bude pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem, tentokrát ovšem se zrychlením a_2 ve směru osy y.

Koule o hmotnosti m_1 vykonává ve směru osy x rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením a_1:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2 = \frac{1}{2}g(\sin\alpha)t^2.$$

Ve směru osy y je souřadnice koule nulová:

$$y_1(t) = 0.$$

Koule o hmotnosti m_2 vykonává ve směru osy y rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením a_2:

$$y_2(t) = \frac{1}{2}a_2t^2 = \frac{1}{2}g(\cos\alpha)t^2.$$

Ve směru osy x je souřadnice koule nulová:

$$x_2(t) = 0.$$

Vztah pro polohu těžiště soustavy n hmotných bodů vypadá následovně:

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

kde m_i jsou hmotnosti jednotlivých hmotných bodů a x_i jim příslušející polohové vektory.

Protože souřadnice těžiště lze počítat po složkách, platí po dosazení do předchozích vztahů pro x-ovou souřadnici těžiště naší soustavy:

$$x_T(t) = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_ix_i(t)}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1x_1(t) + m_2x_2(t)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1g(\sin\alpha)t^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Analogicky pro y-ovou souřadnici těžiště platí:

$$y_T(t) = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_iy_i(t)}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1y_1(t) + m_2y_2(t)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2g(\cos\alpha)t^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Souřadnice těžiště se tedy v námi zvoleném souřadném systému mění s časem podle těchto vztahů:

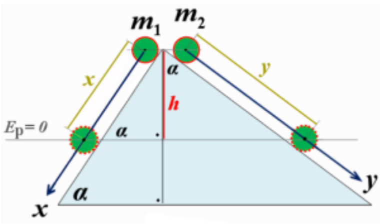
$$x_T(t) = \frac{m_1g(\sin\alpha)t^2}{2(m_1 + m_2)},$$

$$y_T(t) = \frac{m_2g(\cos\alpha)t^2}{2(m_1 + m_2)},$$

$$z_T(t) = 0.$$

Výpočet se započtením momentů setrvačností koulí

Souřadný systém zavedeme analogicky jako v předchozí části, ale s tím rozdílem, že obě osy budeme vést rovnoběžně s povrchem nakloněných rovin ve vzdálenosti R od něj - tím zajistíme, že y-ová



souřadnice první koule a x-ová souřadnice druhé koule zůstanou během pohybu nulové (viz obrázek).

Nenulový moment setrvačnosti J koulí se projeví v okamžiku, kdy budeme určovat zrychlení ve směru jednotlivých os. Část potenciální energie koule E_p se při pohybu po nakloněné rovině přemění na kinetickou rotační energii, E_r, čímž zbývá méně energie na kinetickou energii posuvného pohybu koule E_k. Koule se tedy pohybuje s menším zrychlením, než když jsme její moment setrvačnosti zanedbávali.

K nalezení velikosti zrychlení těžiště koulí využijeme zákon zachování mechanické energie.

Vybereme dvě situace a napíšeme, jakou celkovou mechanickou energii v nich jednotlivé koule mají. Hladinu nulové potenciální energie volíme v hloubce h pod místem vypuštění (viz obrázek výše).

Pro kouli o hmotnosti m1:

Situace 1 – okamžik vypuštění:

$$E_1 = E_{p1},$$

kde E_{p1} je potenciální energie koule o hmotnosti m_1.

Situace 2 – hmotný střed koule urazil dráhu x:

$$E_2 = E_{r1} + E_{k1},$$

kde E_{r1} je kinetická energie rotačního pohybu koule o hmotnosti m_1 vzhledem k ose procházející jejím středem a E_{k1} kinetická energie jejího posuvného pohybu.

Podle zákona zachování mechanické energie platí:

$$E_1 = E_2,$$

po dosazení potom získáme vztah:

$$E_{p1} = E_{r1} + E_{k1}.$$

Ze známých vztahů pro výpočty těchto jednotlivých energií dostaneme:

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_x^2 + \frac{1}{2} J {\omega_1}^2,$$

kde v_x je rychlost těžiště koule, J moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející středem koule a ω_1 její úhlová rychlost.

Pro moment setrvačnosti homogenní koule o hmotnosti m_1 a poloměru R vzhledem k ose procházející jejím středem platí:

$$J = \frac{2}{5} m_1 R^2.$$

Z obrázku je zřejmé, že

$$\sin\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \sin\alpha.$$

Velikost zrychlení těžiště první koule označíme a_x. Ze vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb víme:

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2,$$

$$v_x = a_x t.$$

A z vlastností rotačního pohybu s úhlovou rychlostí ω_1:

$$\omega_1 = \frac{v_x}{R}.$$

Předchozí vztahy nyní zkombinujeme a získáme:

$$m_1 g \cdot \frac{1}{2} a_x t^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} m_1 (a_x t)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m_1 R^2 (\frac{a_x t}{R})^2.$$

Dalšími úpravami dostaneme vztah:

$$a_x = \frac{5}{7} g \sin\alpha.$$

Analogicky můžeme postupovat v případě koule o hmotnosti m_2, pouze funkci sinus nahradí ve výpočtu výšky h funkce kosinus.

Pro kouli o hmotnosti m_2:
Zákon zachování mechanické energie má tento tvar:

$$E_{p2} = E_{r2} + E_{k2},$$

kde E_{p2} je potenciální energie koule o hmotnosti m_2, E_{r2} je kinetická energie rotačního pohybu této koule vzhledem k ose procházející jejím středem a E_{r2} kinetická energie jejího posuvného pohybu. Potenciální energii počítáme v okamžiku vypuštění, obě kinetické energie po uražení dráhy y (analogicky jako v případě první koule). Ze známých vztahů pro výpočty těchto jednotlivých energií dostaneme:

$$m_2 g h = \frac{1}{2} m_2 v_y^2 + \frac{1}{2} J {\omega_2}^2,$$

kde v_y je rychlost těžiště koule, J moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející středem koule a ω_2 její úhlová rychlost.

Moment setrvačnosti druhé koule určíme stejně jako u koule první, mění se ale geometrie úlohy:

$$cos\alpha = \frac{h}{y} \Rightarrow h = y\cos\alpha$$

.

Velikost zrychlení těžiště první koule označíme a_y. Ze vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb víme:

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2,$$

$$v_y = a_y t.$$

Z vlastností rotačního pohybu s úhlovou rychlostí ω_2 plyne:

$$\omega_2 = \frac{v_y}{R}.$$

Kombinací předchozích vztahů získáme:

$$m_2 g \cdot \frac{1}{2}a_y t^2 \cos\alpha = \frac{1}{2}m_2(a_y t)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}m_2 R^2(\frac{a_y t}{R})^2.$$

Úpravami dostaneme vztah:

$$a_y = \frac{5}{7}g\cos\alpha.$$

Těžiště koule o hmotnosti m_1 vykonává ve směru osy x rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením a_x: a lze pro něj napsat:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{5}{14}g(\sin\alpha)t^2.$$

Ve směru osy y je souřadnice jejího těžiště nulová:

$$y_1(t) = 0.$$

Časovou závislost souřadnic těžiště druhé koule (m_1) vyjádříme jako:

$$y_2(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{5}{14}g(\cos\alpha)t^2.$$

$$x_2(t) = 0.$$

Souřadnice těžiště soustavy lze počítat po složkách:

$$x_T(t) = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i x_i(t)}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{m_1 + m_2} = \frac{5 m_1 g (\sin\alpha) t^2}{14(m_1 + m_2)},$$

$$y_T(t) = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i y_i(t)}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1 y_1(t) + m_2 y_2(t)}{m_1 + m_2} = \frac{5 m_2 g (\cos\alpha) t^2}{14(m_1 + m_2)}.$$

Souřadnice těžiště se tedy v námi zvoleném souřadném systému mění s časem podle těchto vztahů:

$$x_T(t) = \frac{5 m_1 g (\sin\alpha) t^2}{14(m_1 + m_2)},$$

$$y_T(t) = \frac{5 m_2 g (\cos\alpha) t^2}{14(m_1 + m_2)},$$

$$z_T(t) = 0.$$

Příklad 4 (25 bodů)

a) magnetická indukce v okolí dlouhého přímého vodiče

Podle Ampérova zákona celkového proudu:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

aplikovaného na kruhovou smyčku v průřezu vodiče (drátu), se středem v ose a poloměrem R, dostáváme vně drátu:

$$H \cdot (2\pi R) = I \qquad \text{pro} \quad R > a,$$

$$H = \frac{I}{2\pi R} \qquad \text{pro} \quad R > a.$$

kde a je poloměr vodiče.

V okolí vodiče (počítáme, jako by byl vodič ve vakuu - relativní permeabilita vzduchu je v podstatě rovna 1):

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2\pi R}.$$

Magnetická indukce v ose solenoidu:

Magnetické pole vně solenoidu budeme považovat za přibližně nulové a uvnitř solenoidu bude pole homogenní. Velikost magnetické indukce potom určíme pomocí Ampérova zákona

$$\int_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_o I_c.$$

Jako uzavřenou Ampérovou křivku zvolíme obdélník ABCD se stranami délky h rovnoběžnými s osou solenoidu (strana AB je uvnitř solenoidu, strana CD vně).

Integrál na levé straně Ampérova zákona lze rozdělit na součet čtyř integrálů, každý pro jeden ze čtyř úseků pravoúhlé (obdélníkové) křivky

$$\int_{ABCD} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

Druhý a čtvrtý integrál na pravé straně rovnice jsou rovny nule, protože pro každý délkový element těchto úseků je magnetická indukce B buď kolmá k úseku, nebo nulová, takže skalární součin je roven nule.

Třetí integrál podél úsečky CD, která leží mimo solenoid, je nulový, neboť zde je velikost magnetické indukce nulová.

Zbývá tedy první integrál na pravé straně a tak můžeme napsat

$$\int_A^B \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = Bh.$$

(Délku strany obdélníka AB jsme označili jako h).

Výsledný proud I_c uzavřený v pravoúhlé Ampérově křivce není pouze proud I, neboť uvnitř obdélníku se nachází více než jeden závit. Označíme-li počet závitů na jednotku délky n, je

$$I_c = nhI$$

a z Ampérova zákona plyne

$$Bh = \mu_o nhI,$$

a tedy pro velikost magnetické indukce platí

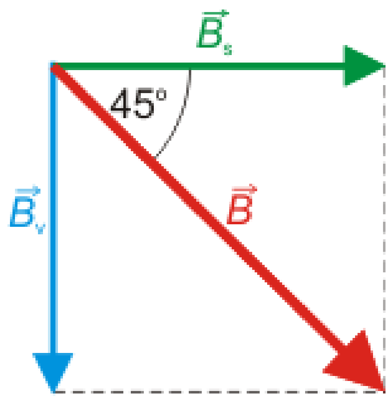
$$B = \mu_o In.$$

b) rozbor situace:

Protože solenoidem i dlouhým vodičem protéká proud, tvoří se v jejich okolí magnetická pole.

Uvnitř solenoidu je magnetické pole rovnoběžné s osou. V našem případě rovnoběžné i s vodičem, který prochází solenoidem. Magnetické pole vodiče tvoří soustředné kružnice se středem ve vodiči. Z toho plyne, že magnetické indukce od solenoidu a vodiče jsou na sebe vždy kolmé.

Aby vektor výsledné magnetické indukce svíral s osou solenoidu, tedy i s magnetickou indukcí, úhel 45°, musí být oba příspěvky stejně velké (situace je znázorněna na obrázku vedle).



Velikost magnetické indukce uvnitř solenoidu nezávisí na poloze (je konstantní). Magnetická indukce dlouhého vodiče klesá se vzdáleností od vodiče. Úkolem tedy je tedy najít takovou vzdálenost od vodiče, kde se velikost magnetické indukce vodiče bude rovnat velikosti magnetické indukce solenoidu.

Pro velikost magnetické indukce dlouhého vodiče B_v platí vztah (viz předchozí část řešení)

$$B_v = \frac{\mu_0 I_v}{2\pi R},$$

kde I_v je proud, který vodičem protéká, a R vzdálenost mezi vodičem a místem, kde určujeme magnetickou indukci.

Pro velikost magnetické indukce solenoidu B_s platí (viz předchozí část řešení):

$$B_s = \mu_0 I_s n,$$

kde I_s je proud, který solenoidem protéká, n hustota závitů (počet závitů na jednotku délky) a μ_0 permeabilita vakua.

Výsledná magnetická indukce B bude svírat s osou solenoidu úhel 45° (viz rozbor situace), jestliže bude platit

$$B_v = B_s$$

Za B_v a B_v dosadíme výše uvedené vztahy

$$\frac{\mu_0 I_v}{2\pi R} = \mu_0 I_c n.$$

Z této rovnice vyjádříme neznámou vzdálenost R

$$R = \frac{I_v}{2\pi I_c n}.$$

Velikost celkové magnetické indukce ve vzdálenosti R od osy vodiče vypočítáme (viz obrázek výše) jako

$$B = \frac{B_s}{\cos 45°}.$$

Číselné řešení:

$$R = \frac{I_v}{2\pi I_c n} = \frac{6}{2\pi \cdot 0,02 \cdot 1000}\,\mathrm{m} = 0{,}048\,\mathrm{m} = 4{,}8\,\mathrm{cm}$$

$$B = \frac{B_s}{\cos 45°} = \frac{\mu_o I_c n}{\cos 45°} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}02 \cdot 1000}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\mathrm{T} \doteq 3{,}554 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T} \doteq 36\,\mu\mathrm{T}.$$