

Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2016, varianta A

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 10 bodů. Tento plný počet bodů získáte za úlohy, u kterých dobře označíte¹ u každé z pěti nabízených odpovědí, zda je správná či chybná. Za každou úlohu, ve které označíte jednu či více odpovědí špatně, získáte 0 bodů, bez ohledu na počet dobře označených odpovědí. U úloh, ve kterých neoznačíte žádnou odpověď špatně, dostanete za každou dobře označenou odpověď 2 body (v případě pěti dobře označených odpovědí tedy plný počet 10 bodů).

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupce mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnutí odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi	
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne
(a)	2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(b)	3	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
(c)	Méně než 12	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
(d)	Kladné číslo	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
(e)	1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
Bodů:		10		0		6		6	

¹Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Uvažujme funkci $f(x) = e^{\sin x}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Funkce f je sudá.
- (b) Funkce f je lichá.
- (c) Funkce f je periodická.
- (d) Funkce f je rostoucí.
- (e) Funkce f je prostá.

2. Rozhodněte, které z následujících výroků o čísle

$$x = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{3\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

jsou pravdivé:

- (a) x je větší než 1.
- (b) x je racionální číslo.
- (c) $x = \frac{4}{3}$
- (d) $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- (e) $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. Alžběta, Blanka, Cecilka, Diana, Eva, Filip, Gustav, Honza a Igor se chtějí seřadit do fronty na oběd. Označme b počet možností, jak se mohou seřadit do fronty tak, aby všechna děvčata stála před všemi chlapci. Dále označme a počet možností, kde je navíc Alžběta první.

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) $b > 4a$
- (b) a je druhá mocnina přirozeného čísla.
- (c) $\sqrt{a} > 25$
- (d) $\sqrt{a} > 35$
- (e) $b > 3000$

4. Prvních šest členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje následující dvě podmínky:

$$\begin{aligned}a_1 - a_2 + a_3 &= 9 \\ a_4 - a_5 + a_6 &= 72\end{aligned}$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Součet $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ je větší než 180.
- (b) $a_6 > 100$
- (c) $a_5 = 48$
- (d) $a_2 = 2$
- (e) $a_1 + a_6 < 100$

5. Nechť M je množina všech řešení rovnice

$$\ln(\operatorname{tg} x) = \ln(\operatorname{cotg} x)$$

v oboru reálných čísel (\ln značí přirozený logaritmus). Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
- (b) Pokud $x \in M$, pak $(x + \pi/2) \in M$.
- (c) Pokud $x \in M$, pak $(x + \pi) \in M$.
- (d) Pokud $x \in M$, pak $3x \in M$.
- (e) Pokud $x \in M$, pak $5x \in M$.

6. Pro reálné číslo a označme M_a množinu všech řešení rovnice

$$ax^3 - a^2|x| = 0$$

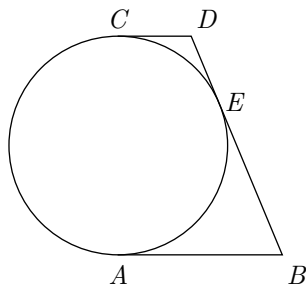
v oboru reálných čísel. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je jednoprvková.
- (b) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je dvouprvková.
- (c) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je tříprvková.
- (d) Existuje reálné číslo a tak, že M_a má více než tři prvky.
- (e) Pro každé reálné číslo b existuje reálné číslo a tak, že $M_a \cap (-\infty, b)$ obsahuje právě jeden prvek.

7. Parabola P1 je zadána rovnicí $y = 2x^2 - 5x + 2$, parabola P2 je zadána rovnicí $y = 7x^2 + 5x + 7$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Paraboly P1 a P2 se protínají ve dvou bodech.
- (b) Paraboly P1 a P2 mají alespoň jeden společný bod.
- (c) Parabola P1 protíná osu x .
- (d) Parabola P2 protíná osu x .
- (e) Vrchol paraboly P1 má kladnou x -ovou souřadnici.

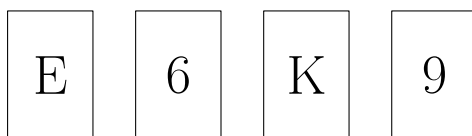
8. K jisté kružnici jsou sestrojeny dvě rovnoběžné tečny AB a CD tak, jak ukazuje obrázek (A, C jsou body dotyku). Délka úsečky AB je 9 a délka úsečky CD je 4. Úsečka BD se dané kružnice dotýká v bodě E .



Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- (a) Poloměr kružnice je větší než 6.
- (b) Poloměr kružnice nelze ze zadaných údajů určit.
- (c) Délka úsečky BD je 13.
- (d) Obsah čtyřúhelníku $ABDC$ je 39.
- (e) Trojúhelník CDE je rovnoramenný.

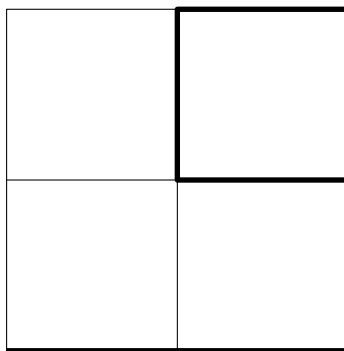
9. Máme čtyři karty a víme, že na každé z nich je z jedné strany napsáno jedno písmeno a z druhé strany jedno celé číslo. Karty leží na stole a vidíme na nich postupně:



Spodní strany karet nevidíme. Pavel tvrdí, že pro karty platí následující pravidlo: „Jestliže je na kartě napsaná samohláska, potom je na ní z druhé strany sudé číslo.“ Které z těchto čtyř karet musíme otočit a zkontrolovat z druhé strany, abychom ověřili platnost Pavlova tvrzení?

- (a) Musíme otočit všechny čtyři karty.
- (b) Musíme otočit libovolné dvě karty.
- (c) Musíme otočit první dvě karty.
- (d) Musíme otočit obě karty, na kterých vidíme písmena.
- (e) Musíme otočit první a poslední kartu.

10. Zkoumejme cesty v mřížce 2×2 z levého dolního do pravého horního rohu. Cesty vedou po hranách čtverečků a nesmějí procházet žádným bodem více než jednou. Na obrázku je vyznačena jedna taková cesta o délce 6.



Označme C_k počet takových cest o délce k . Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) $C_4 > 5$
- (b) $C_5 > 4$
- (c) $C_6 > 4$
- (d) $C_8 < 4$
- (e) $C_8 > 4$

Řešení úloh

1. Správné odpovědi: c.
2. Prozkoumáním x^2 snadno zjistíme, že $x = 4/3$.
Správné odpovědi: a, b, c.
3. Přímočará kombinatorika nám dává $b = 5! \cdot 4! = 120 \cdot 24$ a $a = 4!^2 = 24^2$.
Správné odpovědi: a, b.
4. Posloupnost začíná 3, 6, 12, 24, 48, 96.
Správné odpovědi: a, c, e.
5. Řešení jsou všechna čísla $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ pro k celé.
Správné odpovědi: c, e.
6. Rovnici je snadné vyřešit, pokud rozlišíme tři případy: $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$.
Správné odpovědi: b, d, e.
7. Několikerým řešením kvadratické rovnice zjistíme, že společný bod parabol je jediný o souřadnicích $[-1, 9]$, parabola P_1 protíná osu x v bodech $(5 \pm 9)/4$, zatímco P_2 osu x neprotíná.
Správné odpovědi: b, c, e.
8. Přikreslíme-li patu výšky z bodu D na úsečku AB a použijeme Pythagorovu větu, zjistíme snadno, že poloměr kružnice je 6.
Správné odpovědi: c, e.
9. Musíme ověřit kartu s E (zda je na druhé straně opravdu sudé číslo) a s 9 (zda na druhé straně není samohláska – to by tvrzení také neplatilo).
Správné odpovědi: e.
10. $C_4 = \binom{4}{2} = 6$ (mezi čtyřmi pohyby musíme rozhodnout, které dva jsou nahoru a které dva doprava), $C_5 = 0$ (cesta nemůže mít lichou délku), konečně snadný rozbor možností dává $C_6 = 4$ a $C_8 = 2$.
Správné odpovědi: a, d.

Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2016, varianta B

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 10 bodů. Tento plný počet bodů získáte za úlohy, u kterých dobře označíte¹ u každé z pěti nabízených odpovědí, zda je správná či chybná. Za každou úlohu, ve které označíte jednu či více odpovědí špatně, získáte 0 bodů, bez ohledu na počet dobře označených odpovědí. U úloh, ve kterých neoznačíte žádnou odpověď špatně, dostanete za každou dobře označenou odpověď 2 body (v případě pěti dobře označených odpovědí tedy plný počet 10 bodů).

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupce mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnutí odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi	
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne
(a)	2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
(b)	3	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
(c)	Méně než 12	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
(d)	Kladné číslo	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
(e)	1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
Bodů:		10		0		6		6	

¹Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Uvažujme funkci $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Funkce f je sudá.
- (b) Funkce f je lichá.
- (c) Funkce f je periodická.
- (d) Funkce f je rostoucí.
- (e) Funkce f je prostá.

2. Rozhodněte, které z následujících výroků o čísle

$$x = \sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

jsou pravdivé:

- (a) x je větší než 3.
- (b) x je racionální číslo.
- (c) $x = 2\sqrt{3}$
- (d) $x^2 = 10$
- (e) $x^2 = 6$

3. Konvexní mnohoúhelník má přesně 77 úhlopříček. Určete, co platí pro počet jeho stran.

- (a) Počet jeho stran je sudý.
- (b) Počet jeho stran je dělitelný třemi.
- (c) Počet jeho stran je menší než 15.
- (d) Počet jeho stran je větší než 15.
- (e) Žádný konvexní mnohoúhelník nemá přesně 77 úhlopříček.

4. Pro jistou geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí, že $a_5 - a_4 = 576$ a $a_2 - a_1 = 9$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- (a) Všechny prvky posloupnosti jsou celá čísla.
- (b) Kvocient posloupnosti je sudé celé číslo.
- (c) Součet prvních pěti členů posloupnosti je větší než 800.
- (d) Součet prvních pěti členů posloupnosti je větší než 1000.
- (e) Součet prvních pěti členů posloupnosti je liché celé číslo.

5. Necht M je množina všech řešení rovnice

$$e^{2 \ln \sin x} = 1 - e^{2 \ln \cos x}$$

v oboru reálných čísel (\ln značí přirozený logaritmus). Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- (a) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
- (b) Existují $x, y \in M$ tak, že $x - y = \pi/2$.
- (c) Existují $x, y \in M$ tak, že $x - y = \pi/4$.
- (d) Existuje $x \in M$ tak, že $1000x \in M$.
- (e) Pro každé $x, y \in M$ platí $|x - y| \leq \pi/2$.

6. Pro reálné číslo a označíme M_a množinu všech řešení soustavy rovnic

$$|x| + |y| = 1, \quad xy = a$$

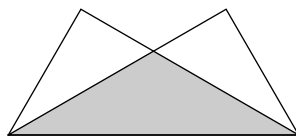
v oboru reálných čísel. (M_a tedy obsahuje dvojice reálných čísel (x, y) , které řeší tuto soustavu rovnic.)

- (a) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je prázdná.
- (b) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je jednoprvková.
- (c) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je dvouprvková.
- (d) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je tříprvková.
- (e) Pro každé reálné číslo a platí: Pokud $(x, y) \in M_a$, pak $(y, x) \in M_a$.

7. Polopřímka je zadaná parametrickým předpisem $x = 2 + 2t$ a $y = 1 - 3t$ s parametrem $t \geq 0$. Kružnice je zadaná rovnicí $(x - 3)^2 + y^2 = 4$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Polopřímka protíná kružnici v jednom bodě.
- (b) Polopřímka protíná kružnici ve dvou bodech.
- (c) Polopřímka protíná osu x .
- (d) Polopřímka protíná osu y .
- (e) Kružnice protíná osu y .

8. Dva shodné trojúhelníky, jejichž vnitřní úhly mají velikosti 30° , 60° a 90° , jsou umístěny tak, že se částečně překrývají a jejich přepony splývají (viz obrázek). Tyto přepony mají délku 12.



Nechť S značí obsah oblasti, která je společná oběma trojúhelníkům. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- (a) $S > 15$
- (b) $S = 12\sqrt{3}$
- (c) $S = 15\sqrt{3}$
- (d) $S > 20$
- (e) $S = 24$

9. Označme f a g dvě funkce reálné proměnné, definované na celém \mathbb{R} . Máme dány tři nerovnosti:

- (A) $f(x) < g(x)$
- (B) $f(x) < g(x) + 10$
- (C) $f(x) > g(x)$

Rozhodněte, která z následujících tvrzení musí být pravdivá pro každou volbu f a g .

- (a) Ze tří nerovností (A), (B), (C) je pro každou hodnotu proměnné x splněna aspoň jedna.
- (b) Ze tří nerovností (A), (B), (C) je pro každou hodnotu proměnné x splněna právě jedna.
- (c) Ze tří nerovností (A), (B), (C) jsou pro každou hodnotu proměnné x splněny aspoň dvě.
- (d) Ze tří nerovností (A), (B), (C) jsou pro každou hodnotu proměnné x splněny nejvýše dvě.
- (e) Počet x , která splňují nerovnost (A), je stejný jako počet x , která splňují nerovnost (B).

10. Zkoumejme celá kladná čísla, která ve svém dekadickém zápisu obsahují stejný počet číslic 1 a 7. Podmínce vyhovují např. čísla 170, 157, 17, 32, ale nikoliv 117, 37, 1. Určete, kolik existuje takových čísel, která jsou menší než 1000.

- (a) Tento počet je lichý.
- (b) Tento počet je dělitelný čtyřmi.
- (c) Tento počet je dělitelný třinácti.
- (d) Tento počet je vyšší než 300.
- (e) Tento počet je vyšší než 500.

Řešení úloh

1. Správné odpovědi: b.
2. Snadnou úpravou čísla x^2 zjistíme, že $x^2 = 10$.
Správné odpovědi: a.
3. Jedná se o 14-úhelník.
Správné odpovědi: a, c.
4. Posloupnost začíná 3, 12, 48, 192, 768.
Správné odpovědi: a, b, c, d, e.
5. Řešením jsou všechna x , kde je $\sin x$ i $\cos x$ kladné číslo, tj. čísla z některého z intervalů $(0, \pi/2) + 2k\pi$ pro celé číslo k .
Správné odpovědi: c, d.
6. Nakreslením vhodného obrázku zjistíme bez počítání, že správné odpovědi jsou: a, c, e.
7. Přímka se stejnou parametrickou rovnicí (pro reálné t), protíná danou kružnici v bodech s $t_{1,2} = (10 \pm \sqrt{100 + 8 \cdot 13})/26$. Je lehké zjistit, že $t_1 > 0 > t_2$.
Správné odpovědi: a, c.
8. Obsah plochy je $S = 12\sqrt{3}$ (výška proti straně délky 12 má délku $2\sqrt{3}$).
Správné odpovědi: a, b, d.
9. Vždy je splněno (B) nebo (C). Může však platit (A) i (B) současně. Pokud $f(x) > g(x) + 10$ (což jistě platí pro mnohé volby f, g a x), tak platí jen jedna z daných nerovností.
Správné odpovědi: a, d.
10. Zkoumaný počet je $7 + 7 \cdot 8 + 7 \cdot 8^2 + 2 + 2 \cdot (7 + 8 + 8) = 559$.
Správné odpovědi: a, c, d, e.