

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2015

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MMUI

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou $\{0, 1\}$, který přijímá všechna slova splňující zároveň tyto podmínky:

- slovo obsahuje aspoň jeden znak 0,
- počet znaků 1 obsažených ve slově je dělitelný třemi.

Například slova 1101 nebo 00000 automat přijme, zatímco slova 111 nebo 0011 nepřijme. Přejchodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít minimální počet stavů. Minimalitu počtu stavů vašeho automatu zdůvodněte.

Příklad 2 (25 bodů)

Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```
program A2015;                               main() /* A2015 */
var A, B, C: integer;                         {
begin                                         int a, b, c;
read(A, B);                                  scanf("%d %d", &a, &b);
while A > B do                                while (a > b)
  begin A:=A-1; B:=B+1 end;                  {a--; b++;}
while B > A do                                while (b > a)
  begin A:=A+1; B:=B-1 end;                  {a++; b--;}
C := A*A - B*B;                               c = a*a - b*b;
writeln(C);                                   printf("%d", c);
end.                                          }
```

Určete, jak závisí výsledná hodnota proměnné C (tzn. výstup programu) na vstupních hodnotách proměnných A, B.

Příklad 3 (25 bodů)

Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)?$$

Příklad 4 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}(x + 6).$$

- (i) Určete definiční obor funkce f .
- (ii) Zkoumejte spojitost funkce f .
- (iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f .
- (iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda má funkce f lokální extrémy, a pokud ano, určete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
- (v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f .
- (vi) Určete asymptoty funkce f .
- (vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f .

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2015

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MMUI

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

K řešení úlohy stačí konečný automat se šesti vnitřními stavy. Pomocí stavů automatu rozlišíme, zda už byl přečten aspoň jeden znak 0 a do které zbytkové třídy modulo 3 patří dosud přečtený počet znaků 1. To dává šest kombinací odpovídajících stavům automatu A, B, C, D, E, F . Koncový z nich bude pouze stav D , který odpovídá již přečtenému znaku 0 a počtu znaků 1 dělitelnému třemi. Minimalitu počtu stavů ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	0	1	
$\rightarrow A$	D	B	$A =$ nebyla 0, počet 1 (mod 3) = 0
B	E	C	$B =$ nebyla 0, počet 1 (mod 3) = 1
C	F	A	$C =$ nebyla 0, počet 1 (mod 3) = 2
$\leftarrow D$	D	E	$D =$ byla 0, počet 1 (mod 3) = 0
E	E	F	$E =$ byla 0, počet 1 (mod 3) = 1
F	F	D	$F =$ byla 0, počet 1 (mod 3) = 2

Příklad 2 (25 bodů)

Vstupní hodnoty proměnných A , B si označíme A_0 , B_0 . Rozlišíme tři případy:

- a) Mají-li vstupní hodnoty A_0 , B_0 stejnou paritu, provede se nejvýše jeden z cyklů v programu. Proběhne podle potřeby tolikrát, až se proměnná s nižší vstupní hodnotou bude přesně rovnat proměnné s vyšší vstupní hodnotou. Obě proměnné A , B tak dosáhnou stejné hodnoty $(A_0 + B_0)/2$ a proto výsledná hodnota proměnné C bude rovna $C = (A + B) \cdot (A - B) = (A_0 + B_0) \cdot 0 = \mathbf{0}$.
- b) Mají-li vstupní hodnoty A_0 , B_0 různou paritu a přitom $A_0 < B_0$, první z cyklů v programu se neprovede ani jednou, ve druhém cyklu se proměnná A postupně zvýší až na hodnotu $(A_0 + B_0 + 1)/2$ a proměnná B se sníží na hodnotu $(A_0 + B_0 - 1)/2$. Výsledná hodnota proměnné C bude proto rovna $C = (A + B) \cdot (A - B) = (A_0 + B_0) \cdot 1 = \mathbf{A_0 + B_0}$.
- c) Mají-li vstupní hodnoty A_0 , B_0 různou paritu a přitom $A_0 > B_0$, bude se v prvním cyklu proměnná A snižovat až na hodnotu $(A_0 + B_0 - 1)/2$ a proměnná B se zvýší na $(A_0 + B_0 + 1)/2$. Tím ale výpočet nekončí. Poté je totiž splněna podmínka druhého cyklu a jeho tělo bude provedeno přesně jednou, přičemž si obě proměnné vymění hodnoty a situace se převede na předchozí případ.

Příklad 3 (25 bodů)

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Podle Heineho věty a l'Hospitalova pravidla platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) - \arctan(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x^2)\cos(x) - 1}{3x^2(1+x^2)} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1 + x^2 \cos(x)}{3x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Existuje tedy index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ je $\sin(\frac{1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n}) > 0$. Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konverguje podle integrálního kritéria. Podle limitního srovnávacího kritéria tedy konverguje i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

a nutně i vyšetřovaná řada.

Příklad 4 (25 bodů)

(i) Definiční obor funkce je

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

(ii) Z věty o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí a ze spojitosti funkce e^x plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $D(f)$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

(iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x^2} \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{(x-3)(x+2)}{x^2} \right).$$

Ze znaménka derivace dostaneme

- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(-\infty, -2)$.
- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(-2, 0)$.
- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(0, 3)$.
- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(3, \infty)$.

Funkce $f(x)$ má lokální maximum $4e^{-\frac{1}{2}}$ v bodě -2 a lokální minimum $9e^{\frac{1}{3}}$ v bodě 3 . Jelikož není funkce f na $D(f)$ omezená shora ani zdola, tak nenabývá na $D(f)$ maxima ani minima.

(v) Vypočteme druhou derivaci

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{13x + 6}{x^4} \right).$$

Za znaménka druhé derivace dostaneme

- $f''(x) < 0$, a tedy f je konkávní, na intervalu $(-\infty, -\frac{6}{13})$.
- $f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(-\frac{6}{13}, 0)$.
- $f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(0, \infty)$.

(vi) Funkce f má asymptoty $y = x + 7$ a $x = 0$.

(vii) Náčrt grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:

