

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2015

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)?$$

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}(x + 6).$$

- (i) Určete definiční obor funkce f .
- (ii) Zkoumejte spojitost funkce f .
- (iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f .
- (iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda má funkce f lokální extrémy, a pokud ano, určete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
- (v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f .
- (vi) Určete asymptoty funkce f .
- (vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f .

Příklad 3 (25 bodů)

Spočtěte

$$\int_M \frac{2x - y}{x + y} dx dy,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x + y)^3 < xy, x \geq 0, y \geq 0\}$. Použijte zobecněné polární souřadnice.

Příklad 4 (25 bodů)

Najděte ortonormální bázi podprostoru vektorového prostoru \mathbb{R}^4 generovaného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ a určete ortogonální projekci vektoru \mathbf{v}_3 na podprostor generovaný vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. (Ortonormální bázi i ortogonální projekci hledejte vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.)

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, -1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 2, 7), \quad \mathbf{v}_3 = (6, 1, -1, 2)$$

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2015

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Podle Heineho věty a l'Hospitalova pravidla platí

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^3}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) - \arctan(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x^2)\cos(x) - 1}{3x^2(1+x^2)} = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1 + x^2 \cos(x)}{3x^2(1+x^2)} &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Existuje tedy index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ je $\sin(\frac{1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n}) > 0$. Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konverguje podle integrálního kritéria. Podle limitního srovnávacího kritéria tedy konverguje i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

a nutně i vyšetřovaná řada.

Příklad 2 (25 bodů)

(i) Definiční obor funkce je

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

(ii) Z věty o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí a ze spojitosti funkce e^x plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $D(f)$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

(iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x^2} \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{(x-3)(x+2)}{x^2} \right).$$

Ze znaménka derivace dostaneme

- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(-\infty, -2)$.
- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(-2, 0)$.
- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(0, 3)$.
- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(3, \infty)$.

Funkce $f(x)$ má lokální maximum $4e^{-\frac{1}{2}}$ v bodě -2 a lokální minimum $9e^{\frac{1}{3}}$ v bodě 3 . Jelikož není funkce f na $D(f)$ omezená shora ani zdola, tak nenabývá na $D(f)$ maxima ani minima.

(v) Vypočteme druhou derivaci

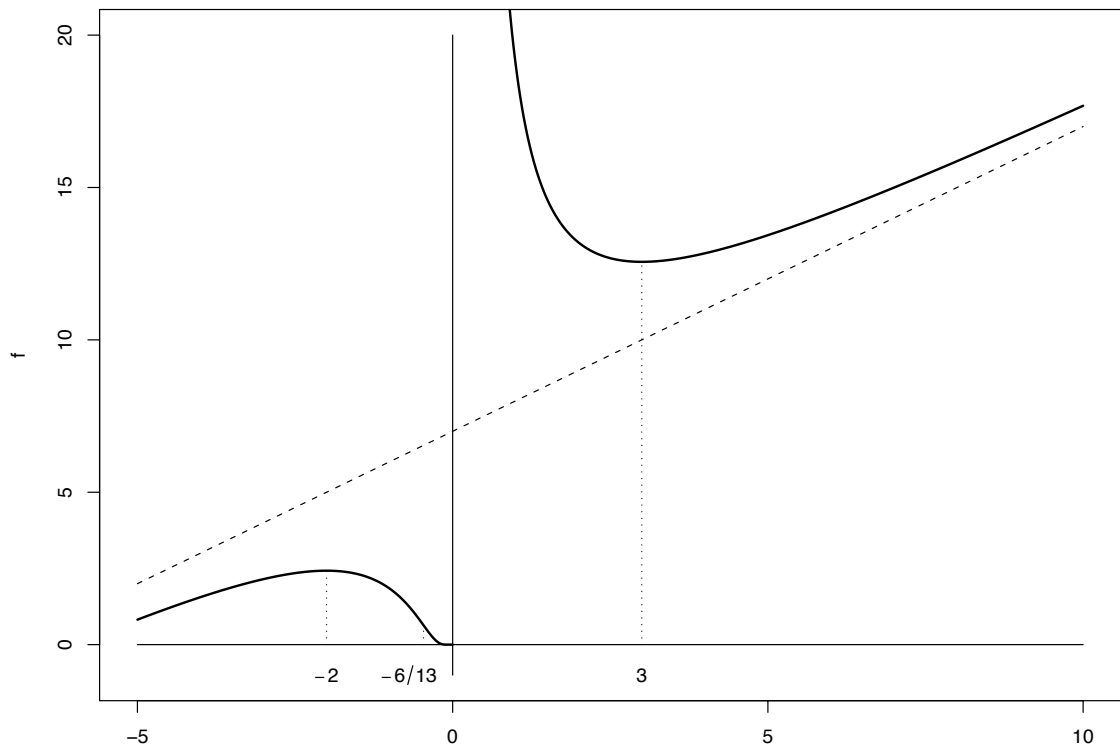
$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{13x + 6}{x^4} \right).$$

Za znaménka druhé derivace dostaneme

- $f''(x) < 0$, a tedy f je konkávní, na intervalu $(-\infty, -\frac{6}{13})$.
- $f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(-\frac{6}{13}, 0)$.
- $f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(0, \infty)$.

(vi) Funkce f má asymptoty $y = x + 7$ a $x = 0$.

(vii) Náčrt grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:



Příklad 3 (25 bodů)

Použijeme substituci $x = r \cos^2(\alpha)$, $y = r \sin^2(\alpha)$, $r > 0$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Z $(x + y)^3 < xy$ dostáváme $0 < r < \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha)$. Množina $M \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x + y)^3 < xy, x > 0, y > 0\}$ má nulovou Lebesgueovu míru. Jacobián je $2r \sin(\alpha) \cos(\alpha)$. Tedy

$$\begin{aligned} \int_M \frac{2x - y}{x + y} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha)} \frac{r(2 \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))}{r} 2r \sin(\alpha) \cos(\alpha) dr d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha)} 2r(2 \cos^3(\alpha) \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \sin^3(\alpha)) dr d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [r^2]_0^{\sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha)} (2 \cos^3(\alpha) \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \sin^3(\alpha)) d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(\alpha) \sin^5(\alpha) (2 \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) d\alpha. \end{aligned}$$

Použijeme substituci $\sin(\alpha) = t$ a dostaneme

$$\int_M \frac{x - y}{x + y} dx dy = \int_0^1 (1 - t^2)^2 t^5 (2 - 3t^2) dt = \frac{1}{120}.$$

Příklad 4 (25 bodů)

Použijeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces s průběžným normováním.

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, -1)$$

$$\mathbf{w}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2, 7) + \frac{6}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, -1) = (1, 0, 2, 7) + (1, 2, 0, -1) = (2, 2, 2, 6)$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{w}'_2}{\|\mathbf{w}'_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{12}}(2, 2, 2, 6) = \frac{1}{\sqrt{12}}(1, 1, 1, 3)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{w}'_3 &= \mathbf{v}_3 - ((\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2) = (6, 1, -1, 2) - \left(\frac{6}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, -1) + \frac{12}{\sqrt{12}} \frac{1}{\sqrt{12}}(1, 1, 1, 3) \right) \\ &= (6, 1, -1, 2) - ((1, 2, 0, -1) + (1, 1, 1, 3)) = (6, 1, -1, 2) - (2, 3, 1, 2) = (4, -2, -2, 0)\end{aligned}$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{w}'_3}{\|\mathbf{w}'_3\|} = \frac{1}{2\sqrt{6}}(4, -2, -2, 0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1, 0)$$

Jedna z ortonormálních bází prostoru generovaného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ je

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{12}}(1, 1, 1, 3), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1, 0) \right) .$$

Podprostor generovaný vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ je roven podprostoru generovanému vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$. Orto­gonální projekci vektoru \mathbf{v}_3 na tento podprostor odečítáme od vektoru \mathbf{v}_3 při výpočtu vektoru \mathbf{w}'_3 , je tedy rovná $(2, 3, 1, 2)$.