

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2015

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Spočtěte

$$\int_M \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy,$$

kde $M = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0, x^2 + y^2 \leq a\}$.

Příklad 2 (25 bodů)

Nalezněte supremum a infimum funkce

$$f(x, y) = e^{x+y}$$

na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x + y > 0\}$$

a rozhodněte, zda funkce f těchto hodnot nabývá.

Příklad 3 (25 bodů)

Nechť náhodný vektor $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$ má multinomické rozdělení s celkovým počtem pozorování $N_1 + N_2 + N_3 = n$ a s pravděpodobnostmi $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{4} + \frac{\theta}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\theta}{4}, \frac{1}{2})$, kde $\theta \in (-1, 1)$ je neznámý parametr.

- (i) Spočítejte maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ .
- (ii) Určete asymptotické rozdělení odhadu $\hat{\theta}_n$.
- (iii) Navrhněte nestranný odhad parametru θ založený na N_1 a spočítejte jeho asymptotické rozdělení. Zjistěte, pro jaká θ je jeho asymptotický rozptyl více než dvojnásobkem asymptotického rozptylu maximálně věrohodného odhadu.
- (iv) Sestavte testovou statistiku Raova skórového testu hypotézy $H_0 : \theta = \theta_0$ proti alternativě $H_1 : \theta \neq \theta_0$ a určete kritický obor tohoto testu ve speciálním případě $\theta_0 = 0$.

Příklad 4 (25 bodů)

Kupónová obligace v nominální hodnotě $F = 10$ s ročním kupónem $C = 1$ splatná přesně za dva roky (tj. zcela jistě po datu exkupuonu) se prodává za (tržní) cenu $P = \frac{399}{44}$ (všechny hodnoty v tisících Kč).

- (i) Vyjádřete obecně současnou hodnotu uvedené obligace při hodnotící úrokové míře i .
- (ii) Formulujte vztah pro výnos do splatnosti (YTM).
- (iii) Vypočtete výnos do splatnosti s výše uvedenými konkrétními hodnotami.

Studijní program: Matematika*Studijní obor:* Finanční a pojistná matematika**Varianta A — řešení****Příklad 1** (25 bodů)

$$\begin{aligned}\int_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy &= \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right] = \int_0^{\sqrt{a}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r \ln(1+r^2) d\varphi dr \\ &= \int_0^{\sqrt{a}} \pi r \ln(1+r^2) dr = [t = 1+r^2] = \frac{\pi}{2} \int_1^{1+a} \ln(t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} [t(\ln(t) - 1)] = \frac{\pi}{2} (1+a)(\ln(1+a) - 1) + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} (1+a) \ln(1+a) - \frac{\pi a}{2}.\end{aligned}$$

Příklad 2 (25 bodů)

Označme $g(x, y) = x + y$. Protože je exponenciála rostoucí a spojitá, stačí řešit pouze supremum a infimum funkce g na M . Označme $\Phi(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$.

Nyní ukážeme, že množina \overline{M} je omezená a $\overline{M} = M \cup \{(0, 0)\}$. Převedeme vztahy $\Phi(x, y) = 0, x + y > 0$ do polárních souřadnic a dostaneme rovnici $r = h(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin^3(\alpha) + \cos^3(\alpha)}$, kde $r > 0$ a $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) = I$. Protože funkce h je spojitá na intervalu I a záporná pro $\alpha \in I \setminus [0, \frac{\pi}{2}]$, tak existuje $R = \max_I(h)$. Pak $M \subset \overline{B(0, R)}$ a tedy M je omezená. Lze snadno odvodit, že existuje $\epsilon > 0$, že pro každé $x \in (0, \epsilon)$ je $\Phi(x, x^2) < 0, \Phi(x, x^3) > 0$. Ze spojitosti Φ tedy plyne, že pro každé $\delta > 0$ je $B((0, 0), \delta) \cap M \neq \emptyset$. Tedy $(0, 0) \in \overline{M}$. Na druhou stranu

$$\overline{M} \subset M \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \Phi(x, y) = 0, x + y = 0\} = M \cup \{(0, 0)\}.$$

Tedy $\overline{M} = M \cup \{(0, 0)\}$.

\overline{M} je omezená uzavřená množina, tedy je kompaktní. Z tohoto a ze spojitosti g na \overline{M} plyne, že g nabývá maxima a minima na \overline{M} .

Nyní ověříme předpoklady věty o Lagrangeových multiplikatorech. Funkce g a Φ jsou C^1 na \mathbb{R}^2 a $\nabla\Phi(x, y) = (3x^2 - 2y, 3y^2 - 2x)$ je nulový pouze v bodech $(0, 0) \in \overline{M}$ a $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \notin \overline{M}$. Označíme tedy bod $(0, 0)$ jako podezřelý a zbytek řešíme na $\overline{M} \setminus \{(0, 0)\} = M$.

Z věty o Lagrangeových multiplikatorech plyne, že body, v nichž může být extrém, jsou pouze body $(x, y) \in M$, pro které existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, jež řeší soustavu rovnic $\nabla(g - \lambda\Phi)(x, y) = (0, 0), \Phi(x, y) = 0$. Toto splňuje pouze bod $(1, 1)$. Nalezli jsme tedy 2 body $(0, 0) \in \overline{M} \setminus M$ a $(1, 1) \in M$. Z toho plyne, že supremum f na M se nabývá v bodě $(1, 1)$ a je rovno e^2 a infimum f na M se nenabývá a je rovno 1.

Příklad 3 (25 bodů)

(i) Sdružená hustota pozorování \mathbf{N} je

$$f(n_1, n_2, n_3) = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!} \left(\frac{1+\theta}{4}\right)^{n_1} \left(\frac{1-\theta}{4}\right)^{n_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_3}, \quad \text{pokud } n_1 + n_2 + n_3 = n.$$

Věrohodnostní funkce pro parametr θ je

$$L(\theta) = C \left(\frac{1+\theta}{4}\right)^{N_1} \left(\frac{1-\theta}{4}\right)^{N_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N_1-N_2}.$$

a logaritmická věrohodnost je

$$\ell(\theta) = N_1 \log\left(\frac{1+\theta}{4}\right) + N_2 \log\left(\frac{1-\theta}{4}\right) + (n - N_1 - N_2) \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log C.$$

Věrohodnost je až na konstantu stejná, jako kdybychom pozorovali n nezávislých stejně rozdělených vektorů $\mathbf{N}_i = (N_{i1}, N_{i2}, N_{i3})$ s rozdělením $\text{Mult}_3(1, \boldsymbol{\pi})$, přičemž $\mathbf{N} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i$. Skórová statistika je

$$U(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{N_1}{4} \cdot \frac{4}{1+\theta} - \frac{N_2}{4} \cdot \frac{4}{1-\theta} = \frac{1}{1-\theta^2} [N_1 - N_2 - \theta(N_1 + N_2)].$$

Rovnice $U(\hat{\theta}) = 0$ má právě jedno řešení $\hat{\theta} = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$ a to je maximálně věrohodný odhad parametru θ .

(ii) Skórová funkce (pro i -té z n pozorování) je

$$U_i(\theta) = \frac{1}{1-\theta^2} [N_{i1} - N_{i2} - \theta(N_{i1} + N_{i2})].$$

Platí $U(\theta) = \sum_{i=1}^n U_i(\theta)$, což je součet nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Snadno ověříme

$$\mathbf{E}U_i(\theta) = \mathbf{E}N_{i1} \frac{1}{1+\theta} - \mathbf{E}N_{i2} \frac{1}{1-\theta} = 0.$$

Dále

$$\frac{\partial U_i(\theta)}{\partial \theta} = \frac{2\theta}{(1-\theta^2)^2} [N_{i1} - N_{i2} - \theta(N_{i1} + N_{i2})] - \frac{1}{1-\theta^2} (N_{i1} + N_{i2}),$$

kde hranatá závorka má nulovou střední hodnotu. Nyní můžeme spočítat Fisherovu informaci

$$I(\theta) = -\mathbf{E} \frac{\partial U_i(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{1-\theta^2} \left(\frac{1+\theta}{4} + \frac{1-\theta}{4} \right) = \frac{1}{2(1-\theta^2)}.$$

Jelikož obecně platí $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, I^{-1}(\theta))$, dostáváme $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, 2(1-\theta^2))$.

(iii) Jelikož $\mathbf{E}N_1 = n(1+\theta)/4$, nestranným odhadem θ založeným na N_1 je $\tilde{\theta} = 4N_1/n - 1$. Podle centrální limitní věty

$$\sqrt{n} \left(\frac{N_1}{n} - \frac{1+\theta}{4} \right) \xrightarrow{d} \mathbf{N} \left(0, \frac{1+\theta}{4} \left(1 - \frac{1+\theta}{4} \right) \right),$$

a proto $\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, \sigma^2)$, kde

$$\sigma^2 = 4(1+\theta) \left(1 - \frac{1+\theta}{4} \right) = 4(1+\theta) - (1+\theta)^2 = 3 + 2\theta - \theta^2.$$

Nerovnost $3 + 2\theta - \theta^2 > 4(1-\theta^2)$ lze přepsat ve tvaru $3\theta^2 + 2\theta - 1 > 0$, což platí pro $\theta \in (1/3, 1)$.

(iv) Platí-li nulová hypotéza $H_0 : \theta = \theta_0$, máme

$$\frac{1}{\sqrt{n}}U(\theta_0) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, I(\theta_0)) \quad \text{a proto} \quad \frac{1}{\sqrt{nI(\theta_0)}}U(\theta_0) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, 1)$$

Dosadíme-li za $U(\theta_0)$ a $I(\theta_0)$, dostaneme Raovu testovou statistiku

$$R_n = \sqrt{\frac{2(1 - \theta_0^2)}{n}} \frac{1}{1 - \theta_0^2} [N_1 - N_2 - \theta_0(N_1 + N_2)] = \sqrt{\frac{2}{n(1 - \theta_0^2)}} [N_1 - N_2 - \theta_0(N_1 + N_2)].$$

Pro $\theta_0 = 0$ budeme zamítat hypotézu na hladině α , pokud

$$\sqrt{\frac{2}{n}} |N_1 - N_2| > u_{1-\alpha/2},$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ je $(1 - \alpha/2)$ -kvantil normovaného normálního rozdělení.

Příklad 4 (25 bodů)

(i) Současnou hodnotu označíme PV . Pro uvedenou situaci platí

$$PV = \frac{C}{1+i} + \frac{C+F}{(1+i)^2}.$$

(ii) Je-li obligace na trhu koupena za hodnotu P , je výnos do splatnosti (označme Y) vlastně vnitřní míra výnosnosti (vnitřní výnosové procento) peněžního toku $(-P, C, C+F)$. Výnos do splatnosti v tomto případě je řešením rovnice

$$P = \frac{C}{1+i} + \frac{C+F}{(1+i)^2}$$

vzhledem k proměnné i .

Z toho plynoucí kvadratická rovnice má dva kořeny, z nichž pouze ten větší má ekonomický smysl:

$$Y = \frac{C - 2P + \sqrt{C^2 + 4CP + 4FP}}{2P}.$$

Alternativně po substituci úroková míra \rightarrow diskontní faktor, tj. $v = \frac{1}{1+i}$ je možné získat řešení pro odpovídající diskontní faktor v řešením rovnice pro neznámý diskontní faktor v :

$$P = Cv + (C+F)v^2.$$

(iii) Postup výpočtu pro konkrétní numerické hodnoty:

$$\text{diskriminant} = C^2 + 4CP + 4FP = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{399}{44} + 4 \cdot 10 \cdot \frac{399}{44} = \frac{11 + 399 + 3990}{11} = 400,$$

odmocnina z diskriminantu je tudíž 20 a výsledná hodnota Y je

$$Y = \frac{1 - 2 \cdot \frac{399}{44} + 20}{2 \cdot \frac{399}{44}} = \frac{3}{19}.$$