Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2015

Studijní program: Fyzika
Studijní obory: FFUM

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Pro funkci

$$f(x) := e^{-\frac{1}{1-x^2}}$$

1. Určete definiční obor.
2. Vyšetřete spojitost.
3. Vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru a v $\pm\infty$.
4. Vyšetřete monotonii, lokálni a globální extrémy a obor hodnot.
5. Určete asymptoty grafu.
6. Vyšetřete konkávnost a konvexnost.
7. Načrtněte graf.

Příklad 2 (25 bodů)

Vypočtěte

$$\int_0^{2\ln 2} \frac{2e^x - e^{x/2}}{e^x - 2e^{x/2} + 5}\, dx.$$

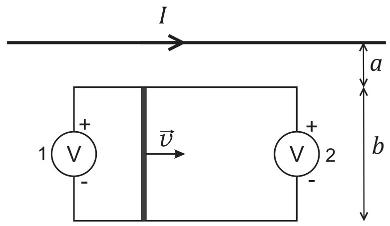
Příklad 3 (25 bodů)

Homogenní koulí, jejíž poloměr a hmotnost jsou rovny poloměru a hmotnosti Země ($R = 6\,378\,\mathrm{km}$, $M = 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$) je provrtán tunel procházející středem koule. Do tunelu upustíme malé závaží o hmotnosti $m = 1{,}3\,\mathrm{kg}$. (Na povrchu koule má závaží nulovou počáteční rychlost. V tunelu i okolí koule je vakuum.)

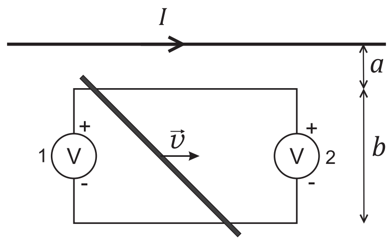
1. Jaká síla působí na závaží v tunelu (v obecné vzdálenosti od středu)?
2. Jak se pohybuje závaží v tunelu? Popište jeho pohyb kvalitativně i kvantitativně.
3. Za jak dlouho závaží dolétne do středu tunelu?
4. Jakou rychlost má závaží ve středu tunelu? Srovnejte tuto rychlost s první kosmickou rychlostí (rychlostí obíhání družice těsně nad povrchem koule).

Příklad 4 (25 bodů)

Dlouhým přímým vodičem protéká proud $I = 100\,\mathrm{A}$. Vedle vodiče je obdélníková smyčka z drátu, připojená ke dvěma voltmetrům 1 a 2, viz obrázek. Vzdálenost bližšího okraje smyčky od vodiče je $a = 1\,\mathrm{cm}$, šířka smyčky je $b = 50\,\mathrm{cm}$. Po smyčce se rychlostí $v = 20\,\mathrm{m/s}$ pohybuje kovová tyčka, obou krajů smyčky se vodivě dotýká.



1. Jaká je velikost magnetické indukce B ve vzdálenosti x od vodiče?
2. Jak velké napětí ukazuje voltmetr 1 a jak velké voltmetr 2?
3. Jaká je polarita napětí na obou voltmetrech? (V obrázku jsou vyznačeny svorky + a − voltmetrů: ukazují voltmetry kladnou nebo zápornou hodnotu?)
4. Jak by se změnila napětí, pokud by kovová tyčka nebyla kolmo na vodič, ale svírala s ním úhel 45°? (Viz obrázek.)



Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2015

Studijní program: Fyzika
Studijní obory: FFUM

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

1. Definiční obor je $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$.
2. f je spojitá na celém definičním oboru.
3. $$\lim_{x \to +1-} f(x) = 0$$
   dostaneme použitím věty o limitě složené funkce, neboť $\lim_{x \to +1-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$ a $\lim_{y \to +\infty} e^{-y} = 0$. Podobně
   $$\lim_{x \to +1+} f(x) = +\infty,$$
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$
   Ze zjevné sudosti f odtud plyne
   $$\lim_{x \to -1+} f(x) = 0,$$
   $$\lim_{x \to -1-} f(x) = +\infty,$$
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$
4. Derivace
   $$f'(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{-2x}{(1-x^2)^2}$$
   existuje na celém definičním oboru. Takže f je rostoucí na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, 0)$, klesající pak na $(0, 1)$ a na $(1, +\infty)$. Odtud vidíme, že $x = 0$ je jediné lokální maximum s hodnotou $f(0) = 1/e$. Porovnáním s limitami vidíme, že globálních extrémů f nenabývá a obor jejích hodnot je $(0, 1/e] \cup (1, +\infty)$ (podle věty o nabývání mezihodnot).
5. Asymptoty jsou $y = 1$ v $+\infty$ i v $-\infty$ a $x = \pm 1$.
6. Druhá derivace
   $$f''(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \cdot \left(\left(\frac{-2x}{(1-x^2)^2} \right)^2 + \frac{-2(1-x^2)^2 - (-2x)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} \right) =$$
   $$= e^{-\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{6x^4 - 2}{(1-x^2)^4}.$$
   existuje na celém definičním oboru, takže f je konkávní na $(-\sqrt[4]{1/3}, \sqrt[4]{1/3})$ a konvexní na $(-\infty, -1) \cup (-1, -\sqrt[4]{1/3}) \cup (\sqrt[4]{1/3}, 1) \cup (1, +\infty)$.

Příklad 2 (25 bodů)

Existence integrálu plyne ze spojitosti integrandu na $[0, 2\ln 2]$. Použitím substituce $t = e^{x/2}$ dostáváme

$$\int_0^{2\ln 2} \frac{2e^x - e^{x/2}}{e^x - 2e^{x/2} + 5}\, dx = \int_1^2 \frac{2t^2 - t}{t^2 - 2t + 5} \cdot \frac{2}{t}\, dt = 2\int_1^2 \frac{2t - 1}{t^2 - 2t + 5}\, dt =$$
$$= 2\int_1^2 \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 5}\, dt + 2\int_1^2 \frac{1}{t^2 - 2t + 5}\, dt = 2\int_4^5 \frac{1}{u} du + 2\int_1^2 \frac{1}{(t-1)^2 + 4}\, dt$$

K poslední úpravě jsme použili substituci $u = t^2 - 2t + 5$, která je korektní, neboť pro $t \in [1, 2]$ je $t^2 - 2t + 5$ prostá funkce. Dále tedy dostaneme

$$\int_0^{2\ln 2} \frac{2e^x - e^{x/2}}{e^x - 2e^{x/2} + 5}\, dx = 2\ln\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{(\frac{t-1}{2})^2 + 1}\, dt =$$
$$= 2\ln\frac{5}{4} + \int_0^{1/2} \frac{1}{v^2 + 1}\, dt = 2\ln\frac{5}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2},$$

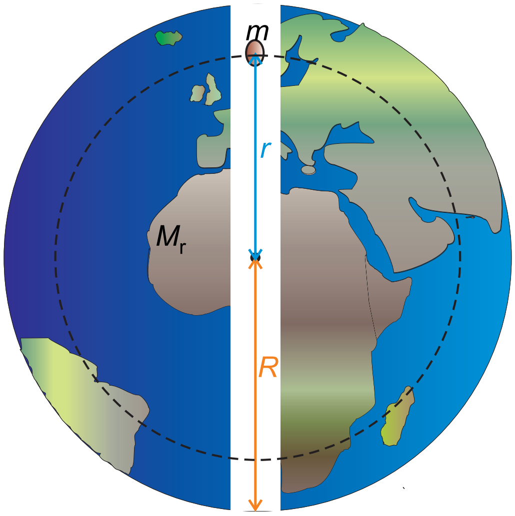
kde jsme ještě použili substituci $v = \frac{t-1}{2}$.

Příklad 3 (25 bodů)

1) Síla na závaží

Formulujeme Newtonův gravitační zákon pro gravitační sílu, která působí na závaží ve vzdálenosti r od středu koule.

Nakreslíme si obrázek, kde R je poloměr koule, r je vzdálenost závaží od středu, m je hmotnost závaží a M_r je hmotnost části koule o poloměru r.



Na závaží působí síla, která je vyvolána částí koule o hmotnosti M_r, výsledné silové působení zbylé části koule je nulové.

$$M_r = \rho V_r,$$

kde ρ je hustota koule a V_r je objem, který je ohraničen přerušovanou čarou v obrázku. Pro objem V_r platí vztah:

$$V_r = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Po dosazení:

$$M_r = \rho\frac{4\pi r^3}{3}.$$

Gravitační síla, která působí na závaží ve vzdálenosti r od středu koule, bude:

$$F = -\kappa\frac{mM_r}{r^2} = -\kappa\frac{m\rho 4\pi r}{3},$$

kde κ je gravitační konstanta.

2. Pohyb závaží

Ve vztahu označíme konstanty písmenem $k = \kappa\frac{m\rho 4\pi}{3}$:

$$F = -kr.$$

Vzniklý vztah se podobá vztahu pro sílu pružnosti v Hookově zákoně. Závaží se chová jako harmonický oscilátor a koná harmonický pohyb.

Známe výslednou sílu působící na závaží. Napíšeme pro něj druhý Newtonův zákon:

$$F = ma,$$

kde a je zrychlení závaží.

Zrychlení vyjádříme jako druhou derivaci vzdálenosti závaží od středu koule r podle času t:

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}.$$

Dosadíme a upravíme:

$$-\kappa\frac{m\rho 4\pi r}{3} = m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\kappa M}{R^3}r = 0.$$

Řešení diferenciální lineární homogenní rovnice 2. řádu hledáme ve tvaru:

$$r = Ae^{i\sqrt{\frac{\kappa M}{R^3}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{\kappa M}{R^3}}t}.$$

Pro určení konstant A a B se podíváme na počáteční podmínky.

V čase $t = 0$ byla vzdálenost závaží od středu koule $r = R$ a rychlost závaží $v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$. Odtud dostáváme:

$$A = B = \frac{R}{2}.$$

Po dosazení:

$$r = \frac{R}{2}e^{i\sqrt{\frac{\kappa M}{R^3}}t} + \frac{R}{2}e^{-i\sqrt{\frac{\kappa M}{R^3}}t}.$$

a úpravě

$$r = R\cos\sqrt{\frac{\kappa M}{R^3}}t.$$

Závaží koná harmonický pohyb s úhlovou frekvencí ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa M}{R^3}}.$$

3) Doba, za kterou závaží dolétne do středu koule

Závaží bude trvat $\frac{1}{4}$ jeho periody T než se dostane do středu koule. Pro periodu platí vztah $T = \frac{2\pi}{\omega}$ do kterého za ω dosadíme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\kappa M}}.$$

Pro dobu t bude platit:

$$t = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\kappa M}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{\kappa M}}.$$

$$T = \frac{3{,}14}{2}\sqrt{\frac{(6378\cdot 10^3)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}\frac{\mathrm{m}^3}{\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\mathrm{kg}}} \doteq 1260\,\mathrm{s} \doteq 21\,\mathrm{min}$$

4) Rychlost závaží ve středu koule

Závislost rychlosti závaží na čase určíme derivací polohového vektoru. Velikost rychlosti je

$$v = \left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right| = R\sqrt{\frac{\kappa M}{R^3}}\sin\sqrt{\frac{\kappa M}{R^3}}t.$$

Dosadíme $t = T/4$ do vztahu pro rychlost

$$v = R\sqrt{\frac{\kappa M}{R^3}}\sin\sqrt{\frac{\kappa M}{R^3}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{\kappa M}} = \sqrt{\frac{\kappa M R^2}{R^3}}\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{\kappa M}{R}}.$$

Poznámka: Velikost rychlosti lze také spočítat z kinetické energie. Ta je rovna práci, kterou na závaží vykoná gravitační síla.

Dopočítáme velikost rychlosti číselně:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}{6378\cdot 10^3}\,\frac{\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}} \doteq 7\,900\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \doteq 28440\frac{km}{h}.$$

Srovnání s první kosmickou rychlostí:

$$F_g = F_d,$$
$$\kappa\frac{mM}{R^2} = m\frac{v^2}{R},$$
$$v = \sqrt{\frac{\kappa M}{R}}.$$

Rychlost závaží ve středu koule je rovna první kosmické rychlosti.

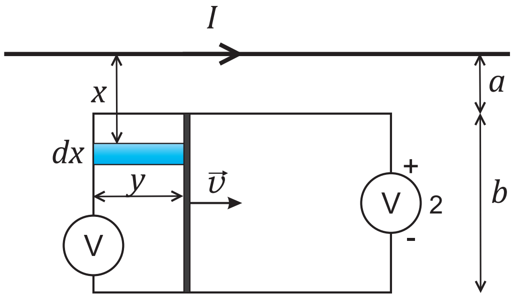
Příklad 4 (25 bodů)

1. Z Ampérova zákona plyne pro nekonečně dlouhý vodič hodnota intenzity magnetického pole $H = \frac{I}{2\pi x}$.

Velikost magnetické indukce je $B = \mu_0 H = \frac{I\mu_0}{2\pi x}$.

2. Příspěvek magnetického indukčního toku ploškou o délce y a šířce dx (viz obrázek) je

$$d\Phi = B\,y\,dx = \frac{I\mu_0 y}{2\pi x}dx.$$



Integrací v mezích od a do $a+b$ dostáváme

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{I\mu_0 y}{2\pi x}dx = \frac{I\mu_0 y}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{1}{x}dx = \frac{I\mu_0 y}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right) = \frac{I\mu_0 y}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right).$$

Napětí indukované v levé části smyčky je podle Faradayova indukčního zákona (protože $y = vt$):

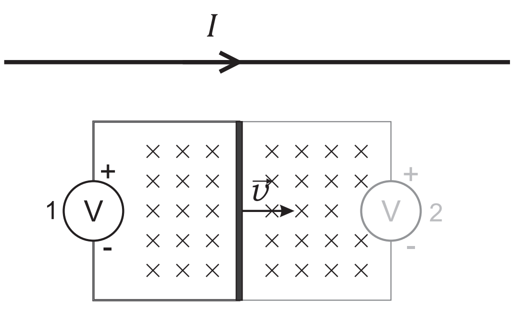
$$U_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{I\mu_0}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\frac{dy}{dt} = -\frac{I\mu_0 v}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right).$$

Po dosazení konkrétních hodnot je velikost indukovaného napětí

$$|U_1| = \frac{100\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 20}{2\pi}\ln(51)\ \mathrm{V} \ = \ 1,573\cdot 10^{-3}\ \mathrm{V} \doteq 1,6\ \mathrm{mV}.$$

Plocha pravé části smyčky se s časem zmenšuje stejně rychle, jako roste plocha levé části smyčky, druhý voltmetr proto ukáže stejně velké napětí.

3. Polaritu napětí můžeme určit podle Lenzova zákona. Levou částí smyčky roste magnetický indukční tok ve směru "do nákresny" (díváme-li se na obrázek, míří tok ve směru od nás; orientaci magnetické indukce od dlouhého vodiče určíme podle pravidla pravé ruky). Pokud by levou částí smyčky protékal indukovaný proud (kdybychom třeba zkratovali voltmetr), vyvolával by magnetické pole působící proti změně, tedy mířící "z nákresny" (proti nám); tento proud by tedy v levé části smyčky tekl proti směru hodinových ručiček. Voltmetr 1 proto ukáže kladnou hodnotu napětí. Podobnou úvahu můžeme udělat pro pravou část smyčky; voltmetr 2 ukáže také kladné napětí.



d) Plochy levé i pravé části smyčky se s časem mění stejně rychle, jako když kovová tyčka byla kolmo. Napětí, které ukazují voltmetry, se proto nezmění, jsou stejná jako ta spočtená v části b)