

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2015
Studijní program Fyzika - všechny obory kromě Učitelství fyziky-matematiky pro střední školy,
Varianta A

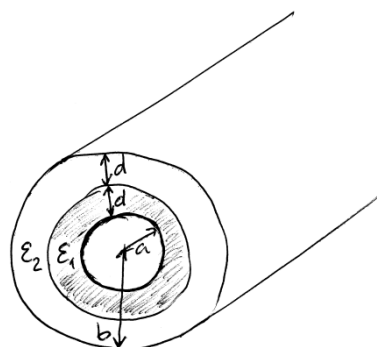
Příklad 1 (25 bodů)

Částice nesoucí náboj q vletěla do magnetického pole o magnetické indukci $\vec{B} = (0,0,B)$ rychlostí $v_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$. Uvažujte pouze působení Lorentzovy síly.

- Určete složky síly působící na částici.
- Určete složky rychlosti částice.
- Určete trajektorii pohybu částice.

Příklad 2 (25 bodů)

Kondenzátor je tvořen dvěma velmi dlouhými souosými válcovými elektrodami o poloměrech a a b ($a < b$) a výšce l . Prostor mezi elektrodami je vyplněn dvěma dielektriky o stejných tloušťkách d a permitivitách ϵ_1 a ϵ_2 způsobem vyznačeným na obrázku. Na vnitřní elektrodu kondenzátoru je přenesen náboj Q .



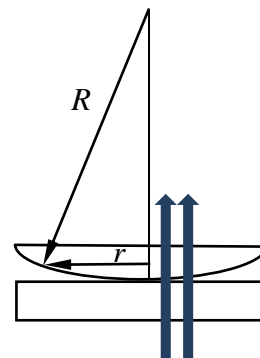
- Určete velikost a směr intenzity elektrického pole E_1 v části kondenzátoru vyplněné dielektrikem o permitivitě ϵ_1 a E_2 v části kondenzátoru vyplněné dielektrikem o permitivitě ϵ_2 .
 - Spočítejte plošnou hustotu volného náboje $\sigma(b)$ na vnější elektrodě kondenzátoru.
 - Spočítejte plošnou hustotu vázaného náboje $\sigma_p(a)$ v té části dielektrika o permitivitě ϵ_1 , která je v kontaktu s vnitřní elektrodou.
 - Odvoďte výraz pro kapacitu tohoto kondenzátoru.
- Nehomogenity pole na okrajích kondenzátoru zanedbejte.

Příklad 3 (25 bodů)

V mikroskopu pozorujeme v prošlém světle Newtonovy kroužky, tj. interferenci světla na vzduchové mezeře (index lomu vzduchu $n_0 = 1$) mezi skleněnou rovinnou destičkou a ploskovypuklou čočkou, která je zdola ozářena sodíkovou výbojkou ($\lambda = 589$ nm.)

- Napište podmínku destruktivní interference (tmavého kroužku).
- Určete poloměr křivosti čočky R , je-li poloměr třetího tmavého kroužku $r_3 = 1$ mm. Předpokládejte, že tloušťka vzduchové mezery je mnohem menší než R .
- Jak se změní hodnota poloměru r_{v3} , vyplníme-li mezeru vodou (index lomu vody $n_v = 4/3$)?

Výsledky stačí vyjádřit obecně.



Příklad 4 (25 bodů)

Měď krystaluje v kubické plošně centrované krystalové soustavě. Hustota mědi je 8920 kg m^{-3} .

- Elementární buňku načrtněte. Vypočítejte mřížkovou konstantu. Výpočet stačí s přesností na 1 platnou číslici bez použití kalkulačky.
- Při jakém úhlu budeme pozorovat difrakční maximum od systému rovin (100), víme-li, že bylo použito monochromatické záření o vlnové délce $0,15 \text{ nm}$? Měření bylo provedeno při teplotě 293 K .
- Do jakého úhlu se posune difrakční maximum téhož systému rovin, budeme-li měření provádět při teplotě 773 K ? Lineární koeficient teplotní roztažnosti mědi $\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Velikosti úhlů vyjádřete pouze obecně, číselné hodnoty nedosazujte, jsou pouze informativní.

Avogadrova konstanta $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, atomová hmotnostní jednotka $m_u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Relativní atomová hmotnost $A_r = 63,55$.

Příklad 1

Částice nesoucí náboj q vletěla do magnetického pole o magnetické indukci $\vec{B} = (0,0,B)$ rychlostí $v_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$. Uvažujte pouze působení Lorentzovy síly

- Určete složky síly působící na částici.
- Určete složky rychlosti částice.
- Určete trajektorii pohybu částice.

Řešení:

- a) Na částici působí Lorentzova síla

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2 \text{ body})$$

V našem případě je $\vec{E} = 0$, tudíž Lorentzova síla má tvar

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

kde

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

Po vektorovém vynásobení má vektor síly tvar

$$\vec{F} = (qBv_y, -qBv_x, 0) \quad (3 \text{ body})$$

Pohybová rovnice má tvar

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Z této rovnice získáme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{qB}{m} \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (3) \quad (5 \text{ bodů})$$

Označíme-li $\omega = \frac{qB}{m}$, derivujeme-li rovnici (1) a do výsledku dosadíme z rovnice (2), potom dostaneme

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = -\omega^2 \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

Řešení této rovnice hledáme ve tvaru

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

S použitím rovnice (1) dostaneme pro y-ovou složku rychlosti

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

a pro z-ovou složku dostaneme

$$v_z = \frac{dz}{dt} = C \quad (5 \text{ bodů})$$

Po uvážení počátečních podmínek v čase $t=0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ dostaneme

$$A = v_{0x}$$

$$B = v_{0y}$$

$$C = v_{0z}$$

Složky vektoru rychlosti částice jsou tedy

$$v_x = v_{0x} \cos(\omega t) + v_{0y} \sin(\omega t)$$

$$v_y = -v_{0x} \sin(\omega t) + v_{0y} \cos(\omega t)$$

$$v_z = v_{0z} \quad (5 \text{ bodů})$$

Složky v_x a v_y popisují kruhový pohyb v rovině x - y . Složka v_z popisuje rovnoměrný pohyb podél z -ové osy

Pro získání popisu trajektorie pohybu integrujeme vektor rychlosti podle času po složkách. S využitím separace proměnných dostaneme pro x -ovou složku

$$\int dx = \int (v_{0x} \cos(\omega t) + v_{0y} \sin(\omega t)) dt$$

Po integraci a uvážení okrajových podmínek pro $t=0$ dostaneme

$$x = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{v_{0y}}{\omega} \cos(\omega t)$$

Obdobně pro y -ovou a z -ovou složku dostaneme

$$y = y_0 + \frac{v_{0x}}{\omega} + \frac{v_{0x}}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin(\omega t)$$

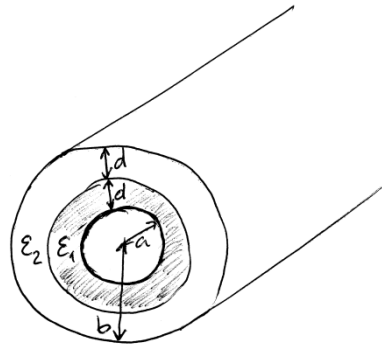
$$z = z_0 + v_{0z} t$$

Trajektorii pohybu je tedy šroubovice.

(5 bodů)

Příklad 2

Kondenzátor je tvořen dvěma velmi dlouhými souosými válcovými elektrodami o poloměrech a a b ($a < b$) a výšce l . Prostor mezi elektrodami je vyplněn dvěma dielektriky o stejných tloušťkách d a permitivitách ϵ_1 a ϵ_2 způsobem vyznačeným na obrázku. Na vnitřní elektrodu kondenzátoru je přenesen náboj Q .



- Určete velikost a směr intenzity elektrického pole E_1 v části kondenzátoru vyplněné dielektrikem o permitivitě ϵ_1 a E_2 v části kondenzátoru vyplněné dielektrikem o permitivitě ϵ_2 .
- Spočtete plošnou hustotu volného náboje $\sigma(b)$ na vnější elektrodě kondenzátoru.
- Spočtete plošnou hustotu vázaného náboje $\sigma_p(a)$ v té části dielektrika o permitivitě ϵ_1 , která je v kontaktu s vnitřní elektrodou.
- Odvoďte výraz pro kapacitu tohoto kondenzátoru.

Nehomogenity pole na okrajích kondenzátoru zanedbejte

Řešení:

a) Pro válcové plochy S_1 a S_2 procházející dielektriky o permitivitách ϵ_1 a ϵ_2 platí podle Gaussova zákona pro dielektrika

$$\oint \vec{D}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \oint \vec{D}_2 \cdot d\vec{S}_2 = Q$$

Z důvodů symetrie bude směr intenzity elektrického pole E a elektrické indukce D radiální a pro jejich velikost platí

$$D_1 2\pi r_1 l = D_2 2\pi r_2 l = \epsilon_1 E_1 2\pi r_1 l = \epsilon_2 E_2 2\pi r_2 l = Q$$

Odtud dostáváme

$$E_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 l r_1} \quad \text{a} \quad E_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 l r_2}$$

pro $r_1 \in (a, a+d)$ a $r_2 \in (a+d, b)$

(8 bodů)

b) Na vnější elektrodě se indukuje náboj $-Q$. Díky větší ploše je hustota volného náboje na vnější elektrodě menší než na vnitřní

$$\sigma_2(b) = -\frac{Q}{2\pi b l}$$

(3 body)

c) Pro hustotu vázaného náboje platí

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Vektor polarizace spočteme ze vztahu

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}$$

Po vyjádření \vec{P} a dosazení $E_1(a)$ (část a) za \vec{E} dostáváme

$$\sigma_p(a) = P_1 = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1} \frac{Q}{2\pi a l} \quad (5 \text{ bodů})$$

d) Kapacita je definována jako

$$C = \frac{Q}{|\Delta\varphi|}$$

Pro její výpočet tedy musíme znát napětí mezi oběma elektrodami. To lze spočítat s použitím výsledků části a)

$$\Delta\varphi = -\int_a^b E dr = -\int_a^{a+d} E_1 dr - \int_{a+d}^b E_2 dr = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 l} \ln \frac{a+d}{a} - \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 l} \ln \frac{b}{a+d}$$

Odtud plyne níže uvedený výraz pro $\frac{1}{C}$ a C

Alternativní postup, který nevyžaduje znalost výsledků z části a) je možné založit např. na znalosti kapacity C_0 válcového kondenzátoru bez vložených dielektrik. Pro takový kondenzátor napětí mezi oběma elektrodami spočítáme z intenzity elektrického pole určené pomocí Gaussova zákona elektrostatiky

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l r}$$

$$\Delta\varphi = -\int_a^b E dr = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} [\ln r]_a^b = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{b}{a}$$

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}$$

Po vložení dielektrik bude platit následující vztah mezi úbytkem napětí mezi elektrodami a na jednotlivých vrstvách dielektrika

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$$

Kapacitu lze tedy spočítat jako kapacitu sériově zapojeného kondenzátoru, kde permitivitu vakua nahradíme permitivitou příslušného dielektrika, a poloměry elektrod rozměry dielektrik

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

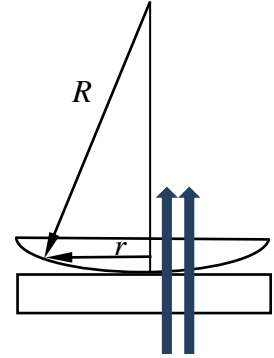
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1 l} \ln \frac{a+d}{a} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_2 l} \ln \frac{b}{a+d}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 l}{\varepsilon_2 \ln\left(\frac{a+d}{a}\right) + \varepsilon_1 \ln\left(\frac{b}{a+d}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 l}{\ln\left[\left(\frac{a+d}{a}\right)^{\varepsilon_2} \left(\frac{b}{a+d}\right)^{\varepsilon_1}\right]} \quad (9 \text{ bodů})$$

Příklad 3

V mikroskopu pozorujeme v prošlém světle Newtonovy kroužky, tj. interferenci světla na vzduchové mezeře (index lomu vzduchu $n_0 = 1$) mezi skleněnou rovinnou destičkou a ploskovypuklou čočkou, která je zdola ozářená sodíkovou výbojkou ($\lambda = 589 \text{ nm}$).

- Napište podmínku destruktivní interference (tmavého kroužku).
- Určete poloměr křivosti čočky R , je-li poloměr třetího tmavého kroužku $r_3 = 1 \text{ mm}$. Předpokládejte, že tloušťka vzduchové mezery je mnohem menší než R .
- Jak se změní hodnota poloměru r_{v3} , vyplníme-li mezeru vodou (index lomu vody $n_v = 4/3$)? Výsledky stačí vyjádřit obecně.



Řešení:

- a) Při odrazu na opticky hustším prostředí dochází ke změně fáze o π

(2 body)

Protože jsou tam dva odrazy na opticky hustším prostředí, podmínka pro destruktivní interferenci je

$$2n_0t = k\lambda - \lambda/2,$$

(5 bodů)

kde t je tloušťka mezery v daném místě a k kladné celé číslo.

- b) Tloušťka mezery v závislosti na vzdálenosti r od středu čočky je

$$r^2 + (R - t)^2 = R^2$$

(3 body)

Při uvážení $t \ll R$ dostaneme

$$t = \frac{r^2}{2R}$$

(3 body)

Dosazením do podmínky destruktivní interference obdržíme pro poloměr křivosti čočky

$$R = \frac{n_0 r^2}{(k-1/2)\lambda}$$

(3 bodů)

což pro třetí tmavý proužek dá

$$R = \frac{r_3^2}{(3-1/2)\lambda} (= 0,68 \text{ m})$$

(3 body)

- c) Pro dané R můžeme psát

$$n_v r_v^2 = n_0 r^2$$
$$r_{v3} = \sqrt{\frac{n_0}{n_v}} r_3 (= 0,87 \text{ m})$$

(6 bodů)

Příklad 4

Měď krystaluje v kubické plošně centrované krystalové soustavě. Hustota mědi je 8920 kg m^{-3} .

a) Elementární buňku načrtněte. Vypočtete mřížkovou konstantu. Výpočet stačí s přesností na 1 platnou číslici bez použití kalkulačky.

b) Při jakém úhlu budeme pozorovat difrakční maximum od systému rovin (100), víme-li, že bylo použito monochromatické záření o vlnové délce $0,15 \text{ nm}$? Měření bylo provedeno při teplotě 293 K .

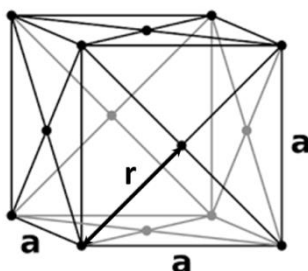
c) Do jakého úhlu se posune difrakční maximum téhož systému rovin, budeme-li měření provádět při teplotě 773 K ? Lineární koeficient teplotní roztažnosti mědi $\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Velikosti úhlů vyjádřete pouze obecně, číselné hodnoty nedosazujte, jsou pouze informativní.

Avogadrova konstanta $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, atomová hmotnostní jednotka $m_u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Relativní atomová hmotnost $A_r = 63,55$.

Řešení:

a) Plošně centrovaná buňka obsahuje 4 atomy (bázové body).



(3 body)

Použít vzorec pro hustotu ($n = 4$):

$$\rho = \frac{n \cdot A_r M_u / N_A}{a^3}$$

nebo ekvivalentní vztah:

$$\rho = \frac{n \cdot A_r m_u}{a^3}$$

a je mřížková konstanta, A_r je relativní atomová hmotnost, M_u je molární hmotová konstanta ($10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$).

$$a = \sqrt[3]{\frac{n \cdot A_r m_u}{\rho}}$$

(5 bodů)

$$= \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 60 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{kg}}{9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}} = \sqrt[3]{45} 10^{-10} \text{ m} = 0,3 - 0,4 \text{ nm}$$

(2 body)

(přesně $a = 0,361 \text{ nm}$, stačí řádově dobře)

b) Mezirovinná vzdálenost $d_{100} = a$ je totožná s mřížkovou konstantou (nejlépe z náčrtku).

(5 bodů)

Dále aplikovat Braggův zákon:

$$2d_{hkl} \sin \vartheta = n\lambda$$

Kde $n = 1$ je řád difrakce, tedy:

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{2 \cdot d_{100}} = \frac{\lambda}{2 \cdot a}$$

(5 bodů)

c) Zde je třeba použít vzoreček pro teplotní roztažnost a opět použít Braggův zákon (5 bodů):

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{2 \cdot d_{100}(1 + \alpha \Delta T)}$$

(5 bodů)