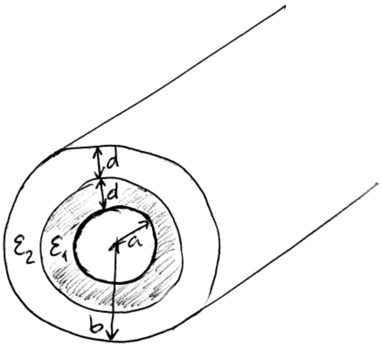
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2015
Studijní program Fyzika - všechny obory kromě Učitelství fyziky-matematiky pro střední školy,
Varianta A

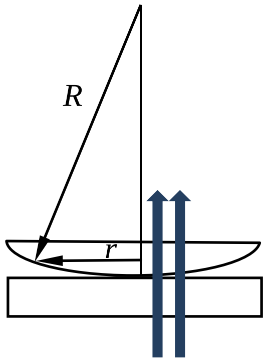
Příklad 1 (25 bodů)
Částice nesoucí náboj q vletěla do magnetického pole o magnetické indukci $\vec{B} = (0,0,B)$ rychlostí $v_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$. Uvažujte pouze působení Lorentzovy síly.
a) Určete složky síly působící na částici.
b) Určete složky rychlosti částice.
c) Určete trajektorii pohybu částice.

Příklad 2 (25 bodů)
Kondenzátor je tvořen dvěma velmi dlouhými souosými válcovými elektrodami o poloměrech a a b ($a<b$) a výšce l. Prostor mezi elektrodami je vyplněn dvěma dielektriky o stejných tloušťkách d a permitivitách ε_1 a ε_2 způsobem vyznačeným na obrázku. Na vnitřní elektrodu kondenzátoru je přenesen náboj Q.



a) Určete velikost a směr intenzity elektrického pole E_1 v části kondenzátoru vyplněné dielektrikem o permitivitě ε_1 a E_2 v části kondenzátoru vyplněné dielektrikem o permitivitě ε_2.
b) Spočtěte plošnou hustotu volného náboje $\sigma(b)$ na vnější elektrodě kondenzátoru.
c) Spočtěte plošnou hustotu vázaného náboje $\sigma_P(a)$ v té části dielektrika o permitivitě ε_1, která je v kontaktu s vnitřní elektrodou.
d) Odvoďte výraz pro kapacitu tohoto kondenzátoru.
Nehomogenity pole na okrajích kondenzátoru zanedbejte.

Příklad 3 (25 bodů)
V mikroskopu pozorujeme v prošlém světle Newtonovy kroužky, tj. interferenci světla na vzduchové mezeře (index lomu vzduchu $n_0 = 1$) mezi skleněnou rovinnou destičkou a ploskovypuklou čočkou, která je zdola ozářená sodíkovou výbojkou ($\lambda = 589$ nm).)



a) Napište podmínku destruktivní interference (tmavého kroužku).
b) Určete poloměr křivosti čočky R, je-li poloměr třetího tmavého kroužku $r_3 = 1$ mm. Předpokládejte, že tloušťka vzduchové mezery je mnohem menší než R.
c) Jak se změní hodnota poloměru r_{v3}, vyplníme-li mezeru vodou (index lomu vody $n_v = 4/3$)?
Výsledky stačí vyjádřit obecně.

Příklad 4 (25 bodů)
Měď krystaluje v kubické plošně centrované krystalové soustavě. Hustota mědi je 8920 kg m^{-3}.
a) Elementární buňku načrtněte. Vypočtěte mřížkovou konstantu. Výpočet stačí s přesností na 1 platnou číslici bez použití kalkulačky.
b) Při jakém úhlu budeme pozorovat difrakční maximum od systému rovin (100), víme-li, že bylo použito monochromatické záření o vlnové délce 0,15 nm? Měření bylo provedeno při teplotě 293 K.
c) Do jakého úhlu se posune difrakční maximum téhož systému rovin, budeme-li měření provádět při teplotě 773 K? Lineární koeficient teplotní roztažnosti mědi $\alpha = 17.10^{-6}$ K^{-1}.
Velikosti úhlů vyjádřete pouze obecně, číselné hodnoty nedosazujte, jsou pouze informativní.
Avogadrova konstanta $N_A = 6{,}022 \,.\, 10^{23}$ mol^{-1}, atomová hmotnostní jednotka m_u=1,66 . 10^{-27} kg.
Relativní atomová hmotnost $A_r = 63{,}55$.

Příklad 1

Částice nesoucí náboj q vletěla do magnetického pole o magnetické indukci $\vec{B} = (0,0,B)$ rychlostí $v_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$. Uvažujte pouze působení Lorentzovy síly

a) Určete složky síly působící na částici.

b) Určete složky rychlosti částice.

c) Určete trajektorii pohybu částice.

Řešení:

a) Na částici působí Lorentzova síla

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad \textbf{(2 body)}$$

V našem případě je $\vec{E} = 0$, tudíž Lorentzova síla má tvar

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

kde

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

Po vektorovém vynásobení má vektor síly tvar

$$\vec{F} = (qBv_y, -qBv_x, 0) \qquad \textbf{(3 body)}$$

Pohybová rovnice má tvar

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Z této rovnice získáme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{qB}{m}\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{qB}{m}\frac{dx}{dt} \qquad (2)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \qquad (3) \qquad \textbf{(5 bodů)}$$

Označíme-li $\omega = \frac{qB}{m}$, derivujeme-li rovnici (1) a do výsledku dosadíme z rovnice (2), potom dostaneme

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -\omega^2 \frac{dx}{dt} \qquad (4)$$

Řešení této rovnice hledáme ve tvaru

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

S použitím rovnice (1) dostaneme pro y-ovou složku rychlosti

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\omega} = -A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

a pro *z*-ovou složku dostaneme

$$v_z = \frac{dz}{dt} = C$$ **(5 bodů)**

Po uvážení počátečních podmínek v čase $t=0,\ \vec{v} = \vec{v}_0$ dostaneme

$$A = v_{0x}$$

$$B = v_{0y}$$

$$C = v_{0y}$$

Složky vektoru rychlosti částice jsou tedy

$$v_x = v_{0x}\cos(\omega t) + v_{0y}\sin(\omega t)$$

$$v_y = -v_{0x}\sin(\omega t) + v_{0y}\cos(\omega t)$$

$$v_z = v_{0z}$$ **(5 bodů)**

Složky v_x a v_y popisují kruhový pohyb v rovině *x-y*. Složka v_z popisuje rovnoměrný pohyb podél *z*-ové osy

Pro získání popisu trajektorie pohybu integrujeme vektor rychlosti podle času po složkách. S využitím separace proměnných dostaneme pro *x*-ovou složku

$$\int dx = \int \left(v_{0x}\cos(\omega t) + v_{0y}\sin(\omega t)\right)dt$$

Po integraci a uvážení okrajových podmínek pro t=0 dostaneme

$$x = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} + \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{v_{0y}}{\omega}\cos(\omega t)$$

Obdobně pro *y*-ovou a *z*-ovou složku dostaneme

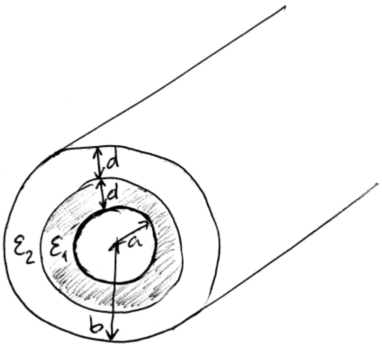
$$y = y_0 + \frac{v_{0x}}{\omega} + \frac{v_{0x}}{\omega}\cos(\omega t) + \frac{v_{0y}}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$x = z_0 + v_{0z}t$$

Trajektorií pohybu je tedy šroubovice. **(5 bodů)**

Příklad 2

Kondenzátor je tvořen dvěma velmi dlouhými souosými válcovými elektrodami o poloměrech a a b ($a<b$) a výšce l. Prostor mezi elektrodami je vyplněn dvěma dielektriky o stejných tloušťkách d a permitivitách ε_1 a ε_2 způsobem vyznačeným na obrázku. Na vnitřní elektrodu kondenzátoru je přenesen náboj Q.



a) Určete velikost a směr intenzity elektrického pole E_1 v části kondenzátoru vyplněné dielektrikem o permitivitě ε_1 a E_2 v části kondenzátoru vyplněné dielektrikem o permitivitě ε_2.

b) Spočtěte plošnou hustotu volného náboje $\sigma(b)$ na vnější elektrodě kondenzátoru.

c) Spočtěte plošnou hustotu vázaného náboje $\sigma_P(a)$ v té části dielektrika o permitivitě ε_1, která je v kontaktu s vnitřní elektrodou.

d) Odvoďte výraz pro kapacitu tohoto kondenzátoru.

Nehomogenity pole na okrajích kondenzátoru zanedbejte

Řešení:

a) Pro válcové plochy S_1 a S_2 procházející dielektriky o permitivitách ε_1 a ε_2 platí podle Gaussova zákona pro dielektrika

$$\oint \vec{D}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \oint \vec{D}_2 \cdot d\vec{S}_2 = Q$$

Z důvodů symetrie bude směr intenzity elektrického pole E a elektrické indukce D radiální a pro jejich velikost platí

$$D_1 2\pi r_1 l = D_2 2\pi r_2 l = \varepsilon_1 E_1 2\pi r_1 l = \varepsilon_2 E_2 2\pi r_2 l = Q$$

Odtud dostáváme

$$E_1 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 l r_1} \quad \text{a} \quad E_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 l r_2}$$

pro $r_1 \in (a, a+d)$ a $r_2 \in (a+d, b)$ **(8 bodů)**

b) Na vnější elektrodě se indukuje náboj -Q. Díky větší ploše je hustota volného náboje na vnější elektrodě menší než na vnitřní

$$\sigma_2(b) = -\frac{Q}{2\pi b l}$$ **(3 body)**

c) Pro hustotu vázaného náboje platí

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Vektor polarizace spočteme ze vtahu

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}$$

Po vyjádření $\vec{P}$ a dosazení $E_1(a)$ (část a) za $\vec{E}$ dostáváme

$$\sigma_p(a) = P_1 = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}\frac{Q}{2\pi a l}$$ **(5 bodů)**

d) Kapacita je definována jako

$$C = \frac{Q}{|\Delta\varphi|}$$

Pro její výpočet tedy musíme znát napětí mezi oběma elektrodami. To lze spočítat s použitím výsledků části a)

$$\Delta\varphi = -\int_a^b E dr = -\int_a^{a+d} E_1 dr - \int_{a+d}^b E_2 dr = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 l}\ln\frac{a+d}{a} - \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 l}\ln\frac{b}{a+d}$$

Odtud plyne níže uvedený výraz pro $\frac{1}{C}$ a C

Alternativní postup, který nevyžaduje znalost výsledků z části a) je možné založit např. na znalosti kapacity C_0 válcového kondenzátoru bez vložených dielektrik. Pro takový kondenzátor napětí mezi oběma elektrodami spočítáme z intenzity elektrického pole určené pomocí Gaussova zákona elektrostatiky

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l r}$$

$$\Delta\varphi = -\int_a^b E dr = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left[\ln r\right]_a^b = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}$$

Po vložení dielektrik bude platit následující vztah mezi úbytkem napětí mezi elektrodami a na jednotlivých vrstvách dielektrika

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$$

Kapacitu lze tedy spočíst jako kapacitu sériově zapojeného kondenzátoru, kde permitivitu vakua nahradíme permitivitou příslušného dielektrika, a poloměry elektrod rozměry dielektrik

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1 l}\ln\frac{a+d}{a} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_2 l}\ln\frac{b}{a+d}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 l}{\varepsilon_2\ln\left(\frac{a+d}{a}\right) + \varepsilon_1\ln\left(\frac{b}{a+d}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 l}{\ln\left[\left(\frac{a+d}{a}\right)^{\varepsilon_2}\left(\frac{b}{a+d}\right)^{\varepsilon_1}\right]}$$ **(9 bodů)**

Příklad 3

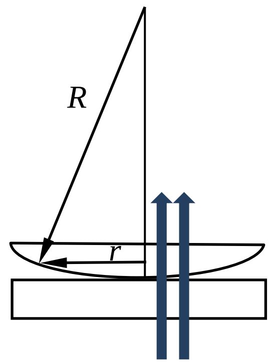
V mikroskopu pozorujeme v prošlém světle Newtonovy kroužky, tj. interferenci světla na vzduchové mezeře (index lomu vzduchu $n_0 = 1$) mezi skleněnou rovinnou destičkou a ploskovypuklou čočkou, která je zdola ozářená sodíkovou výbojkou ($\lambda = 589$ nm).

a) Napište podmínku destruktivní interference (tmavého kroužku).

b) Určete poloměr křivosti čočky *R*, je-li poloměr třetího tmavého kroužku $r_3 = 1$ mm. Předpokládejte, že tloušťka vzduchové mezery je mnohem menší než *R*.

c) Jak se změní hodnota poloměru r_{v3}, vyplníme-li mezeru vodou (index lomu vody $n_v = 4/3$)?

Výsledky stačí vyjádřit obecně.



Řešení:

a) Při odrazu na opticky hustším prostředí dochází ke změně fáze o π **(2 body)**

Protože jsou tam dva odrazy na opticky hustším prostředí, podmínka pro destruktivní interferenci je

$$2n_0 t = k\lambda - \lambda/2, \qquad \textbf{(5 bodů)}$$

kde *t* je tloušťka mezery v daném místě a *k* kladné celé číslo.

b) Tloušťka mezery v závislosti na vzdálenosti *r* od středu čočky je

$$r^2 + (R - t)^2 = R^2 \qquad \textbf{(3 body)}$$

Při uvážení *t* << *R* dostaneme

$$t = \frac{r^2}{2R} \qquad \textbf{(3 body)}$$

Dosazením do podmínky destruktivní interference obdržíme pro poloměr křivosti čočky

$$R = \frac{n_0 r^2}{(k-1/2)\lambda} \qquad \textbf{(3 bodů)}$$

což pro třetí tmavý proužek dá

$$R = \frac{r_3^2}{(3-1/2)\lambda} (= 0{,}68\ m) \qquad \textbf{(3 body)}$$

c) Pro dané *R* můžeme psát

$$n_v r_v^2 = n_0 r^2$$

$$r_{v3} = \sqrt{\frac{n_0}{n_v}}\, r_3 (= 0{,}87\ m) \qquad \textbf{(6 bodů)}$$

Příklad 4

Měď krystaluje v kubické plošně centrované krystalové soustavě. Hustota mědi je 8920 kg m^{-3}.

a) Elementární buňku načrtněte. Vypočtěte mřížkovou konstantu. Výpočet stačí s přesností na 1 platnou číslici bez použití kalkulačky.

b) Při jakém úhlu budeme pozorovat difrakční maximum od systému rovin (100), víme-li, že bylo použito monochromatické záření o vlnové délce 0,15 nm? Měření bylo provedeno při teplotě 293 K.

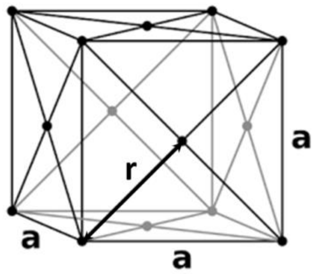
c) Do jakého úhlu se posune difrakční maximum téhož systému rovin, budeme-li měření provádět při teplotě 773 K? Lineární koeficient teplotní roztažnosti mědi α = 17.10^{-6} K^{-1}.

Velikosti úhlů vyjádřete pouze obecně, číselné hodnoty nedosazujte, jsou pouze informativní.

Avogadrova konstanta N_A = 6,022 . 10^{23} mol^{-1}, atomová hmotnostní jednotka m_u=1,66 . 10^{-27} kg. Relativní atomová hmotnost A_r = 63,55.

Řešení:

a) Plošně centrovaná buňka obsahuje 4 atomy (bázové body).



(3 body)

Použít vzorec pro hustotu (n = 4):

$$\rho = \frac{n \cdot A_r M_u / N_A}{a^3}$$

nebo ekvivalentní vztah:

$$\rho = \frac{n \cdot A_r m_u}{a^3}$$

a je mřížková konstanta, A_r je relativní atomová hmotnost, M_u je molární hmotová konstanta (10^{-3} kg mol^{-1}).

$$a = \sqrt[3]{\frac{n \cdot A_r m_u}{\rho}}$$

(5 bodů)

$$= \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 60 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}}{9 \cdot 10^{3}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}}} = \sqrt[3]{45}\, 10^{-10}\ \mathrm{m}\ = 0{,}3 - 0{,}4\ \mathrm{nm}$$

(2 body)

(přesně a = 0,361nm, stačí řádově dobře)

b) Mezirovinná vzdálenost $d_{100} = a$ je totožná s mřížkovou konstantou (nejlépe z náčrtku).

(5 bodů)

Dále aplikovat Braggův zákon:

$$2d_{hkl}\, sin\,\vartheta = n\lambda$$

Kde $n = 1$ je řád difrakce, tedy:

$$\sin\vartheta = \frac{\lambda}{2 \cdot d_{100}} = \frac{\lambda}{2 \cdot a}$$

(5 bodů)

c) Zde je třeba použít vzoreček pro teplotní roztažnost a opět použít Braggův zákon (5 bodů):

$$\sin\vartheta = = \frac{\lambda}{2 \cdot d_{100}(1 + \alpha \Delta T)}$$

(5 bodů)