Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

Studijní program Matematika, bakalářské studium

Studijní program Informatika, bakalářské studium

2015, varianta A

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 10 bodů. Tento plný počet bodů získáte za úlohy, u kterých dobře označíte[1] u každé z pěti nabízených odpovědí, zda je správná či chybná. Za každou úlohu, ve které označíte jednu či více odpovědí špatně, získáte 0 bodů, bez ohledu na počet dobře označených odpovědí. U úloh, ve kterých neoznačíte žádnou odpověď špatně, dostanete za každou dobře označenou odpověď 2 body (v případě pěti dobře označených odpovědí tedy plný počet 10 bodů).

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupečky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtání odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi	
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne
(a)	2	●	○	●	○	○	○	○	○
(b)	3	○	●	○	○	○	●	~~●~~	●
(c)	Méně než 12	●	○	●	○	○	○	~~●~~	○
(d)	Kladné číslo	●	○	○	○	●	○	●	~~●~~
(e)	1	○	●	●	○	○	●	~~●~~	●
Bodů:		**10**		**0**		**6**		**6**	

[1]Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Uvažujme funkci f definovanou pro všechna reálná čísla x předpisem $f(x) = \sin(x^2)$. Rozhodněte, která tvrzení o funkci f jsou pravdivá.

(a) f je prostá.
(b) f je sudá.
(c) f je rostoucí.
(d) f je nezáporná.
(e) f je omezená.

2. Označme P_1 obsah kruhu ohraničeného kružnicí opsanou rovnostrannému trojúhelníku ABC. Dále označme P_2 obsah kruhu ohraničeného kružnicí rovnostrannému trojúhelníku ABC vepsanou. Určete, co platí o poměru P_1 a P_2.

(a) Poměr P_1 a P_2 je roven celému číslu.
(b) Poměr P_1 a P_2 je roven iracionálnímu číslu.
(c) P_1 je dvakrát větší než P_2.
(d) P_1 je čtyřikrát větší než P_2.
(e) Poměr P_1 a P_2 závisí na délce strany trojúhelníku ABC.

3. Mezi čísla 5 a 60 jsme vložili další čtyři celá čísla a, b, c, d tak, že všech šest čísel tvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti v pořadí: $5, a, b, c, d, 60$. Určete, co platí o číslech a, b, c, d.

(a) $a + b + c + d < 150$.
(b) $a + b + c + d < 200$.
(c) $a + d = b + c$.
(d) $a \cdot d = b \cdot c$.
(e) $a \cdot b \cdot c \cdot d$ je dělitelné devíti.

4. Nechť M je množina všech řešení rovnice

$$|\ln x| + \ln(2x) = \ln(5x - 2)$$

v oboru reálných čísel ($\ln$ značí přirozený logaritmus). Rozhodněte, která tvrzení o množině M jsou pravdivá.

(a) M je tříprvková.
(b) M obsahuje pouze kladná čísla.
(c) $M \cap \langle 2, \infty)$ je jednoprvková.
(d) $M \cap (0, 1) = \emptyset$.
(e) $M \cap (1, 2) = \emptyset$.

5. Hodíme pěti korunovými mincemi. Každá může, nezávisle na ostatních, padnout nahoru lícem (číslem) nebo rubem (státním znakem), oboje má pravděpodobnost $1/2$. Řekneme, že nám padla *vyvážená pozice*, pokud jsou dvě mince otočené nahoru lícem a tři rubem nebo naopak – tj. tři lícem a dvě rubem.

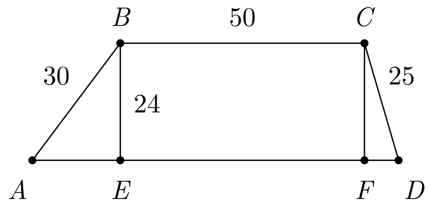
Pokud je jedním způsobem otočená jediná mince a ostatní čtyři jsou druhou stranou, pozici nazveme *nevyváženou*.

Pokud jsou všechny mince stejnou stranou nahoru, jedná se o pozici *extrémní*.

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

(a) Pravděpodobnost, že padne vyvážená pozice, je větší než $\frac{1}{2}$.
(b) Pravděpodobnost, že padne vyvážená pozice, je větší než $\frac{2}{3}$.
(c) Pravděpodobnost, že padne nevyvážená pozice, je větší než $\frac{1}{3}$.
(d) Pravděpodobnost, že padne nevyvážená pozice, je větší než $\frac{1}{2}$.
(e) Pravděpodobnost, že padne extrémní pozice, je větší než $\frac{1}{10}$.

6. Na obrázku je znázorněn lichoběžník $ABCD$ a jeho výšky BE, CF; čísla značí délky příslušných úseček.



Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

(a) Délka úsečky AE je menší než 20.
(b) Délka úsečky FD je menší než 5.
(c) Aspoň jedna z úseček AE, FD má iracionální délku.
(d) Obvod lichoběžníku je 180.
(e) Obsah lichoběžníku je $1\,500$.

7. Rozmisťujeme věže na šachovnici 8×8. Pozici věží nazveme *dobrou*, pokud

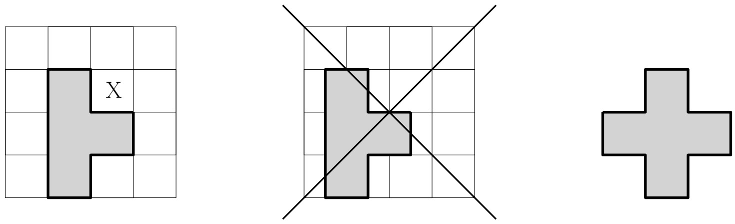
- v každém sloupci a každém řádku jsou nejvýše dvě věže; a
- každá věž je ve stejném řádku nebo ve stejném sloupci jako nějaká jiná.

Označme V_k počet dobrých pozic s k nerozlišitelnými věžemi.

Rozhodněte, zda platí:

(a) V_2 je sudé číslo.
(b) $V_2 > 450$.
(c) $\sqrt{V_3}$ je celé číslo.
(d) $V_3 > 3\,000$.
(e) Z každé dobré pozice se čtyřmi věžemi lze přidáním jedné věže vytvořit dobrou pozici s pěti věžemi.

8. Petr chce umístit do čtverce 4×4 šedý dílek ve tvaru „T“ ze čtyř čtverečků (viz obrázek dole vlevo), přičemž jej může otáčet o násobky devadesáti stupňů. Povolená jsou jen taková umístění, kde „T“-čko zakrývá čtyři celé čtverečky (situace na obrázku uprostřed povolená není).



Pavel v tom chce Petrovi zabránit tím, že některá políčka označí „x“, na žádné z nich pak Petr nesmí dílek umístit.

Označme A nejmenší číslo s následující vlastností: Pavel může označením vhodných A políček zabránit Petrovi v umístění jeho dílku.

Dále označme B analogický počet, pokud Petr umisťuje stejný dílek do čtverce 5×5. Konečně označme C analogický počet, pokud Petr umisťuje dílek ve tvaru kříže (na obrázku nahoře vpravo) do čtverce 4×4. Rozhodněte o platnosti následujících výroků.

(a) $A = 3$.
(b) $A = 4$.
(c) $B = 4$.
(d) $C = 2$.
(e) $C = 3$.

9. Nechť M je množina všech řešení rovnice

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = e^{\frac{1}{2}\ln(1-\cos^2 x)}$$

v oboru reálných čísel ($\ln$ značí přirozený logaritmus). Rozhodněte, která tvrzení o množině M jsou pravdivá.

(a) M je konečná.
(b) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
(c) $M \cap (\pi/2, \pi)$ je jednoprvková.
(d) Pokud $x \in M$, pak $3x \in M$.
(e) Pokud $x \in M$, pak $\operatorname{tg} x = 1$.

10. Anička, Béda, Cyril, Dana, Eva a Fanda soutěžili v luštění hádanek. Za správně vyřešené hádanky dostávali body, každý z nich získal jiný počet bodů. Anička získala méně bodů než Eva i než Béda, který získal méně bodů než Dana, ale více než Fanda i Cyril. Eva získala méně bodů než Dana i než Fanda, který měl více bodů než Cyril.

Určete pravdivost následujících výroků.

(a) Nejvíce bodů určitě získala Dana.
(b) Nelze určit, kdo získal nejvíce bodů.
(c) Eva se určitě umístila na některém z posledních tří míst.
(d) Anička byla určitě poslední nebo předposlední.
(e) Fanda v soutěži určitě nevyhrál ani neprohrál.

Řešení úloh

1 b, e.

2 a, d.

3 a, b, c, e.

4 b, c, e.

5 a

6 a, d, e.

7 a, c, d.

8 b, d.

9 b, c, d.

10 a, c, d, e.