

**Přijímací zkouška na MFF UK v Praze**  
**Studijní program Matematika, bakalářské studium**  
**Studijní program Informatika, bakalářské studium**  
**2015, varianta A**

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

**Bodování.** Za každou úlohu je možno získat 10 bodů. Tento plný počet bodů získáte za úlohy, u kterých dobře označíte<sup>1</sup> u každé z pěti nabízených odpovědí, zda je správná či chybná. Za každou úlohu, ve které označíte jednu či více odpovědí špatně, získáte 0 bodů, bez ohledu na počet dobře označených odpovědí. U úloh, ve kterých neoznačíte žádnou odpověď špatně, dostanete za každou dobře označenou odpověď 2 body (v případě pěti dobře označených odpovědí tedy plný počet 10 bodů).

**Způsob označování a korekce.** Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupcečky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

**Příklad.** Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnutí odpovědí v úloze „Výsledek úlohy  $1 + 1$  je“:

|              |              | Odpovědi                         |                                  | Odpovědi                         |                       | Odpovědi                         |                                  | Odpovědi                         |                                  |
|--------------|--------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
|              |              | Ano                              | Ne                               | Ano                              | Ne                    | Ano                              | Ne                               | Ano                              | Ne                               |
| (a)          | 2            | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            |
| (b)          | 3            | <input type="radio"/>            | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input checked="" type="radio"/> | <input checked="" type="radio"/> | <input checked="" type="radio"/> |
| (c)          | Méně než 12  | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/>            |
| (d)          | Kladné číslo | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input checked="" type="radio"/> | <input checked="" type="radio"/> |
| (e)          | 1            | <input type="radio"/>            | <input checked="" type="radio"/> | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input checked="" type="radio"/> | <input checked="" type="radio"/> | <input checked="" type="radio"/> |
| <b>Bodů:</b> |              | <b>10</b>                        |                                  | <b>0</b>                         |                       | <b>6</b>                         |                                  | <b>6</b>                         |                                  |

<sup>1</sup>Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Uvažujme funkci  $f$  definovanou pro všechna reálná čísla  $x$  předpisem  $f(x) = \sin(x^2)$ . Rozhodněte, která tvrzení o funkci  $f$  jsou pravdivá.

- (a)  $f$  je prostá.
- (b)  $f$  je sudá.
- (c)  $f$  je rostoucí.
- (d)  $f$  je nezáporná.
- (e)  $f$  je omezená.

2. Označme  $P_1$  obsah kruhu ohraničeného kružnicí opsanou rovnostrannému trojúhelníku  $ABC$ . Dále označme  $P_2$  obsah kruhu ohraničeného kružnicí rovnostrannému trojúhelníku  $ABC$  vepsanou. Určete, co platí o poměru  $P_1$  a  $P_2$ .

- (a) Poměr  $P_1$  a  $P_2$  je roven celému číslu.
- (b) Poměr  $P_1$  a  $P_2$  je roven iracionálnímu číslu.
- (c)  $P_1$  je dvakrát větší než  $P_2$ .
- (d)  $P_1$  je čtyřikrát větší než  $P_2$ .
- (e) Poměr  $P_1$  a  $P_2$  závisí na délce strany trojúhelníku  $ABC$ .

3. Mezi čísla 5 a 60 jsme vložili další čtyři celá čísla  $a, b, c, d$  tak, že všech šest čísel tvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti v pořadí: 5,  $a, b, c, d, 60$ . Určete, co platí o číslech  $a, b, c, d$ .

- (a)  $a + b + c + d < 150$ .
- (b)  $a + b + c + d < 200$ .
- (c)  $a + d = b + c$ .
- (d)  $a \cdot d = b \cdot c$ .
- (e)  $a \cdot b \cdot c \cdot d$  je dělitelné devíti.

4. Necht'  $M$  je množina všech řešení rovnice

$$|\ln x| + \ln(2x) = \ln(5x - 2)$$

v oboru reálných čísel ( $\ln$  značí přirozený logaritmus). Rozhodněte, která tvrzení o množině  $M$  jsou pravdivá.

- (a)  $M$  je tříprvková.
- (b)  $M$  obsahuje pouze kladná čísla.
- (c)  $M \cap \langle 2, \infty \rangle$  je jednoprvková.
- (d)  $M \cap (0, 1) = \emptyset$ .
- (e)  $M \cap (1, 2) = \emptyset$ .

5. Hodíme pěti korunovými mincemi. Každá může, nezávisle na ostatních, padnout nahoru lícem (číslem) nebo rubem (státním znakem), oboje má pravděpodobnost  $1/2$ . Řekneme, že nám padla *vyvážená pozice*, pokud jsou dvě mince otočené nahoru lícem a tři rubem nebo naopak – tj. tři lícem a dvě rubem.

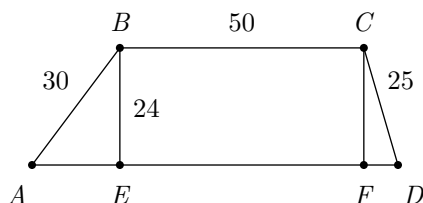
Pokud je jedním způsobem otočená jediná mince a ostatní čtyři jsou druhou stranou, pozici nazveme *nevyváženou*.

Pokud jsou všechny mince stejnou stranou nahoru, jedná se o pozici *extrémní*.

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

- Pravděpodobnost, že padne vyvážená pozice, je větší než  $\frac{1}{2}$ .
- Pravděpodobnost, že padne vyvážená pozice, je větší než  $\frac{2}{3}$ .
- Pravděpodobnost, že padne nevyvážená pozice, je větší než  $\frac{1}{3}$ .
- Pravděpodobnost, že padne nevyvážená pozice, je větší než  $\frac{1}{2}$ .
- Pravděpodobnost, že padne extrémní pozice, je větší než  $\frac{1}{10}$ .

6. Na obrázku je znázorněn lichoběžník  $ABCD$  a jeho výšky  $BE$ ,  $CF$ ; čísla značí délky příslušných úseček.



Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

- Délka úsečky  $AE$  je menší než 20.
- Délka úsečky  $FD$  je menší než 5.
- Aspoň jedna z úseček  $AE$ ,  $FD$  má iracionální délku.
- Obvod lichoběžníku je 180.
- Obsah lichoběžníku je 1 500.

7. Rozmístujeme věže na šachovnici  $8 \times 8$ . Pozici věží nazveme *dobrou*, pokud

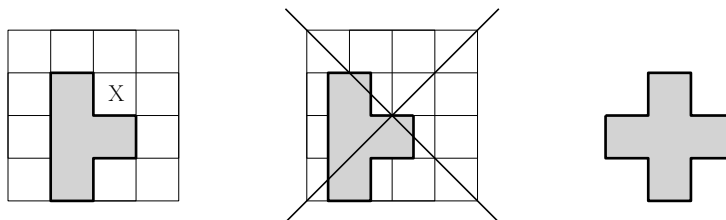
- v každém sloupci a každém řádku jsou nejvýše dvě věže; a
- každá věž je ve stejném řádku nebo ve stejném sloupci jako nějaká jiná.

Označme  $V_k$  počet dobrých pozic s  $k$  nerozlišitelnými věžemi.

Rozhodněte, zda platí:

- $V_2$  je sudé číslo.
- $V_2 > 450$ .
- $\sqrt{V_3}$  je celé číslo.
- $V_3 > 3\,000$ .
- Z každé dobré pozice se čtyřmi věžemi lze přidáním jedné věže vytvořit dobrou pozici s pěti věžemi.

8. Petr chce umístit do čtverce  $4 \times 4$  šedý dílek ve tvaru „T“ ze čtyř čtverečků (viz obrázek dole vlevo), přičemž jej může otáčet o násobky devadesáti stupňů. Povolená jsou jen taková umístění, kde „T“-čko zakrývá čtyři celé čtverečky (situace na obrázku uprostřed povolená není).



Pavel v tom chce Petrovi zabránit tím, že některá políčka označí „x“, na žádné z nich pak Petr nesmí dílek umístit.

Označme  $A$  nejmenší číslo s následující vlastností: Pavel může označením vhodných  $A$  políček zabránit Petrovi v umístění jeho dílku.

Dále označme  $B$  analogický počet, pokud Petr umísťuje stejný dílek do čtverce  $5 \times 5$ . Konečně označme  $C$  analogický počet, pokud Petr umísťuje dílek ve tvaru kříže (na obrázku nahoře vpravo) do čtverce  $4 \times 4$ . Rozhodněte o platnosti následujících výroků.

- (a)  $A = 3$ .
- (b)  $A = 4$ .
- (c)  $B = 4$ .
- (d)  $C = 2$ .
- (e)  $C = 3$ .

9. Necht'  $M$  je množina všech řešení rovnice

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = e^{\frac{1}{2} \ln(1 - \cos^2 x)}$$

v oboru reálných čísel ( $\ln$  značí přirozený logaritmus). Rozhodněte, která tvrzení o množině  $M$  jsou pravdivá.

- (a)  $M$  je konečná.
- (b) Pokud  $x \in M$ , pak  $-x \in M$ .
- (c)  $M \cap (\pi/2, \pi)$  je jednoprvková.
- (d) Pokud  $x \in M$ , pak  $3x \in M$ .
- (e) Pokud  $x \in M$ , pak  $\operatorname{tg} x = 1$ .

10. Anička, Béda, Cyril, Dana, Eva a Fanda soutěžili v luštění hádanek. Za správně vyřešené hádanky dostávali body, každý z nich získal jiný počet bodů. Anička získala méně bodů než Eva i než Béda, který získal méně bodů než Dana, ale více než Fanda i Cyril. Eva získala méně bodů než Dana i než Fanda, který měl více bodů než Cyril.

Určete pravdivost následujících výroků.

- (a) Nejvíce bodů určitě získala Dana.
- (b) Nelze určit, kdo získal nejvíce bodů.
- (c) Eva se určitě umístila na některém z posledních tří míst.
- (d) Anička byla určitě poslední nebo předposlední.
- (e) Fanda v soutěži určitě nevyhrál ani neprohrál.

## Řešení úloh

- 1 b, e.
- 2 a, d.
- 3 a, b, c, e.
- 4 b, c, e.
- 5 a
- 6 a, d, e.
- 7 a, c, d.
- 8 b, d.
- 9 b, c, d.
- 10 a, c, d, e.