Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2014

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE, MDU

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Spočtěte

$$\int_M xy\,dxdy\ ,$$

kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 2, 0 < y, y < x, y < 2-x\}$.

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|.$$

(i) Určete definiční obor funkce f.

(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.

(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.

(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda má funkce f lokální extrémy - pokud ano, určete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?

(v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f.

(vi) Určete asymptoty funkce f.

(vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 3 (25 bodů)

Zjistěte, zda funkce

$$f(x,y,z) = e^{xyz}$$

nabývá na množině

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 30\}$$

maxima a minima. Pokud některé z těchto hodnot nabývá, tak ji vypočtěte.

Příklad 4 (25 bodů)

Spočítejte determinant reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ a+3 & b & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

v závislosti na parametrech a, b. Rozhodněte, pro která a, b je matice A regulární.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2014

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE, MDU

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Použijeme Fubiniho větu. Proto je pro nás výhodné psát

$$M = M_1 \cup M_2 = \{0 < x \leq 1, 0 < y < x\} \cup \{1 < x < 2, 0 < y < 2 - x\} \ .$$

Nyní

$$\begin{aligned}\int_{M_1} xy\,dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_0^x xy\,dy\Big)\,dx = \int_0^1 x\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \Big[\frac{x^4}{8}\Big]_0^1 = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_{M_2} xy\,dxdy &= \int_1^2 \Big(\int_0^{2-x} xy\,dy\Big)\,dx = \int_1^2 x\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{2-x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{x(2-x)^2}{2}\,dx = \int_1^2 \frac{x^3}{2} - 2x^2 + 2x\,dx = \Big[\frac{x^4}{8} - \frac{2x^3}{3} + x^2\Big]_1^2 \\ &= 2 - \frac{16}{3} + 4 - \frac{1}{8} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{5}{24} \ .\end{aligned}$$

Tedy

$$\int_M xy\,dxdy = \int_{M_1} xy\,dxdy + \int_{M_2} xy\,dxdy = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} = \frac{1}{3} \ .$$

Příklad 2 (25 bodů)

(i) Definiční obor funkce je

$$D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty).$$

(ii) Z věty o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí a ze spojitosti funkce $\ln(x)$ plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $D(f)$.

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} = 0$, $\lim_{x\to1} = -\infty$ a $\lim_{x\to2} = \infty$.

(iv) Snadno vypočteme pro $x \in D(f)$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)(x-2)}.$$

Ze znaménka derivace dostaneme

$f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(-\infty, 1)$.

$f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(1, 2)$.

$f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(2, \infty)$.

Jelikož f' existuje a $f' \neq 0$ na $D(f)$, tak funkce f nemá na svém definičním oboru žádný lokální extrém. Jelikož není funkce f na $D(f)$ omezená shora ani zdola, tak nenabývá na $D(f)$ maxima ani minima.

(v) Vypočteme druhou derivaci pro $x \in D(f)$

$$f''(x) = \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}.$$

Za znaménka druhé derivace dostaneme

$f''(x) < 0$, a tedy f je konkávní, na intervalu $(-\infty, 1)$.

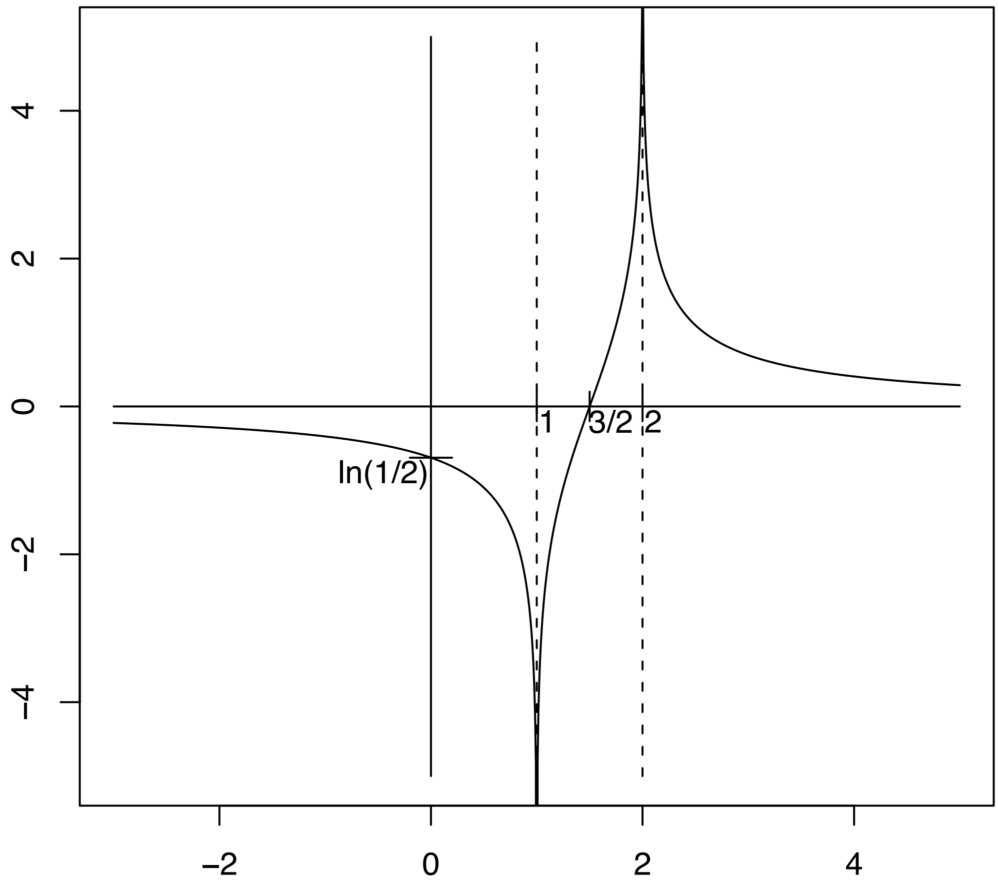
$f''(x) < 0$, a tedy f je konkávní, na intervalu $(1, \frac{3}{2})$.

$f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(\frac{3}{2}, 2)$.

$f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(2, \infty)$.

(vi) Funkce f má v bodech $-\infty$ a ∞ asymptotu $v(x) = 0$.

(vii) Náčrt grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:



4
2
0
−2
−4
1
3/2
2
ln(1/2)
−2
0
2
4

Příklad 3 (25 bodů)

Označme $g(x, y, z) = xyz$. Exponenciála je rostoucí funkce. Stačí tedy řešit pouze maximum a minimum funkce g na M. Označme $\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 30$. Množina M je uzavřená, neboť Φ je spojitá funkce a $M = \Phi^{-1}(\{0\})$. Množina M je omezená, neboť z rovnice

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 30$$

snadno plyne, že $x^2 \leq 30, y^2 \leq 30, z^2 \leq 30$. Tedy M je kompaktní. Z tohoto a ze spojitosti funkce g plyne, že g nabývá na M maxima a minima. Nyní ověříme předpoklady věty o Lagrangeových multiplikátorech. Funkce g a Φ jsou C^1 na $\mathbb{R}^3$ a $\nabla\Phi(x, y, z) = (2x, 4y, 6z)$ je nulový pouze v bodě $(0, 0, 0)$, jenž není v množině M. Dále hledáme $x, y, z \in \mathbb{R}$, pro které existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, jež řeší soustavu rovnic $\nabla(g - \lambda\Phi)(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $\Phi(x, y, z) = 0$. Řešeními soustavy jsou tyto body: $(0, 0, \pm\sqrt{10})$, $(0, \pm\sqrt{15}, 0)$, $(\pm\sqrt{30}, 0, 0)$, $(\pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{\frac{10}{3}})$. Nyní dosadíme do funkce f tyto body a zjistíme, že maximem funkce f na množině M je $\exp(10\sqrt{\frac{5}{3}})$ a minimem je $\exp(-10\sqrt{\frac{5}{3}})$.

Příklad 4 (25 bodů)

Užitím pravidel o změně determinantu při elementárních úpravách a rozvoje podle sloupce nebo řádku dostáváme

$$\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ a+3 & b & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ a+3 & b & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ a+3 & b & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = 2(ab-a) = 2a(b-1)\ .$$

Determinant matice A je roven $2a(b-1)$. Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant, tedy právě tehdy, když $a \neq 0$ a $b \neq 1$.