Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2014

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Spočtěte
$$\int_M x^2\,dxdy\ ,$$
kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 2, 0 < y < 1, y < (x-2)^2\}$.

Příklad 2 (25 bodů)

Zjistěte, zda funkce
$$f(x,y) = (x + \sqrt{3}y)^2$$
nabývá na množině
$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x^2 + y^2 \leq 9,\ y \geq 0,\ y \geq -x\}$$
maxima a minima a případně určete jejich velikosti.

Příklad 3 (25 bodů)

Uvažujte náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení s distribuční funkcí
$$F(x;\theta) = 1 - \mathrm{e}^{-\theta x}(1 + \theta x), \quad \theta > 0,$$
pro $x \in (0,\infty)$, $F(x;\theta) = 0$ jinak.

(i) Spočítejte maximálně věrohodný odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ.
(ii) Určete asymptotické rozdělení odhadu $\widehat{\theta}_n$.
(iii) Sestavte testovou statistiku Raova skórového testu hypotézy $H_0 : \theta = 2$ proti alternativě $H_1 : \theta \neq 2$ a určete kritický obor tohoto testu.
(iv) Sestavte testovou statistiku pro test poměrem věrohodností hypotézy $H_0 : \theta = 2$ proti alternativě $H_1 : \theta \neq 2$ a určete kritický obor tohoto testu.

Příklad 4 (25 bodů)

Nechť náhodná veličina L reprezentující ztrátu má dvojitě exponenciální (Laplaceovo) rozdělení s hustotou
$$f(x;\mu,\beta) = \frac{e^{-\frac{|x-\mu|}{\beta}}}{2\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}$$
a $\mu \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ jsou parametry.

1. Uveďte obecnou definici hodnoty v riziku (VaR) na úrovni $1-\alpha$ pro libovolné rozdělení.
2. Vyjádřete obecně VaR na úrovni $1-\alpha$ pro výše uvedené rozdělení.
3. Spočtěte VaR na úrovni $\frac{1}{2e}$ pro $\mu = -0.0007$ a $\beta = 0.014$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2014

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Použijeme Fubiniho větu. Proto je pro nás výhodné psát

$$M = M_1 \cup M_2 = \{0 < x \leq 1, 0 < y < 1\} \cup \{1 < x < 2, 0 < y < (x-2)^2\} .$$

Nyní

$$\begin{aligned}\int_{M_1} x^2 \, dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_0^1 x^2 \, dy \Big) \, dx = \int_0^1 x^2 \Big[y \Big]_0^1 dx \\ &= \int_0^1 x^2 \, dx = \Big[\frac{x^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_{M_2} x^2 \, dxdy &= \int_1^2 \Big(\int_0^{(x-2)^2} x^2 \, dy \Big) \, dx = \int_1^2 x^2 \Big[y \Big]_0^{(x-2)^2} dx \\ &= \int_1^2 x^2 (x-2)^2 \, dx = \int_1^2 x^4 - 4x^3 + 4x^2 \, dx \\ &= \Big[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \Big]_1^2 = \frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3} - \frac{1}{5} + 1 - \frac{4}{3} = \frac{8}{15} .\end{aligned}$$

Tedy

$$\int_M x^2 \, dxdy = \int_{M_1} x^2 \, dxdy + \int_{M_2} x^2 \, dxdy = \frac{1}{3} + \frac{8}{15} = \frac{13}{15} .$$

Příklad 2 (25 bodů)

1. řešení:

Množina M je zřejmě uzavřená a omezená a funkce f spojitá, a tedy někde minima a maxima nabývá. Vyšetříme lokální extrémy uvnitř M a poté extrémy na hranici M.

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému uvnitř M je (vzhledem k diferencovatelnosti f)

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2(x + \sqrt{3}y)$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 2\sqrt{3}(x + \sqrt{3}y)$$

Toto je splněno, právě když $x + \sqrt{3}y = 0$. V bodech (x, y) splňující tuto rovnost máme $f(x, y) = 0$ (ve skutečnosti žádný z nich neleží uvnitř M).

Hranice M sestává ze 3 částí. Každou z nich zvlášť parametrizujeme a budeme tak vyšetřovat funkci jen 1 proměnné.

1. $x = t, y = 0,\ t \in [0, 3]$. Dosazením do $f(x, y)$ dostaneme funkci $f_1(t) = t^2$, jejíž extrémy jsou zřejmé. Leží v bodech $(0, 0)$ s $f(0, 0) = 0$ a $(3, 0)$ s $f(3, 0) = 9$.
2. $x = -t, y = t,\ t \in [0, 3/\sqrt{2}]$ (horní mez pro t určíme z Pythagorovy věty). Dosazením do $f(x, y)$ dostaneme funkci $f_2(t) = (-1 + \sqrt{3})^2 t^2$, jejíž extrémy jsou také zřejmé. Leží v bodech $(0, 0)$ s $f(0, 0) = 0$ a $(-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$ s $f(-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}) = (-1 + \sqrt{3})^2 \frac{9}{2}$.
3. $x = 3\cos t, y = 3\sin t,\ t \in [0, 3\pi/4)$. Dosazením do $f(x, y)$ dostaneme funkci $f_3(t) = 9(\cos t + \sqrt{3}\sin t)^2$. Nutná podmínka lokálního extrému je $0 = (d/dt)f_3 = 18(\cos t + \sqrt{3}\sin t)(-\sin t + \sqrt{3}\cos t)$. Toto nastává pro $t \in [0, 3\pi/4)$ splňující $0 = \cos t + \sqrt{3}\sin t$ nebo $0 = -\sin t + \sqrt{3}\cos t$. Pomocí funkce tangens zjistíme, že první podmínka na vyšetřovaném intervalu být splněna nemůže, druhá je splněna pro $t = \pi/3$. Tomu odpovídá bod $(3/2, 3\sqrt{3}/2)$ s hodnotou $f(3/2, 3\sqrt{3}/2) = 36$. Do vyšetřování bychom ještě měli zahrnout krajní body $(3, 0)$ a $(-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$, ty už jsme však vyšetřili výše.

Zbývá porovnat hodnoty ve výše nalezených bodech splňujících nutné podmínky extrému. Protože $(-1 + \sqrt{3})^2 \frac{9}{2} < 36$, vidíme, že minimem je hodnota 0 a maximem hodnota 36.

2. řešení:

f nabývá konstantních hodnot na přímkách s rovnicemi $x + \sqrt{3}y = w$, $w \in \mathbb{R}$. Všechny tyto přímky jsou navzájem rovnoběžné se směrovým vektorem $(1, -1/\sqrt{3})$. Hodnota w pro danou přímku je x-ová souřadnice jejího průsečíku s osou x. Na takové přímce pak f nabývá hodnoty w^2. K nalezení maxima tedy musíme najít přímku p se směrovým vektorem $(1, -1/\sqrt{3})$, která protína množinu M a která protíná osu x co nejdále od počátku. Takovou přímkou p je zřejmě tečna k oblouku kružnice, který je částí hranice M. Bod dotyku najdeme jako průsečík p a kolmice k p procházející středem kružnice (což je počátek). Kolmice k p má směrový vektor $(1/\sqrt{3}, 1)$. Příslušný bod na kružnici získáme přenormováním: $3\frac{(1/\sqrt{3},1)}{||(1/\sqrt{3},1)||} = (3/2, 3\sqrt{3}/2)$. Hodnota maxima tedy je $f(3/2, 3\sqrt{3}/2) = 36$. Podobně k nalezení minima musíme najít přímku p se směrovým vektorem $(1, -1/\sqrt{3})$, která protína množinu M a která protína osu x co nejblíže počátku. Takovou přímkou je sama přímka procházející počátkem, čili hodnota minima je $f(0, 0) = 0$.

Příklad 3 (25 bodů)

(i)

$$
\begin{aligned}
\text{Hustota:} \quad & f(x;\theta) = \theta^2 x \mathrm{e}^{-\theta x} \text{ pro } x \in (0,\infty),\ f(x;\theta) = 0 \text{ jinak} \\
\text{Věrohodnostní funkce:} \quad & L(\theta) = \theta^{2n}\Big(\prod_{i=1}^n X_i\Big)\exp\Big(-\theta\sum_{i=1}^n X_i\Big) \\
\text{Logaritmická věrohodnost:} \quad & \ell(\theta) = 2n\log\theta + \sum_{i=1}^n \log X_i - \theta\sum_{i=1}^n X_i \\
\text{Skórová statistika:} \quad & U(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n X_i \\
\text{Skórová funkce:} \quad & U_i(\theta) = \frac{2}{\theta} - X_i \\
\text{Fisherova informace:} \quad & I(\theta) = -\mathsf{E}\frac{\partial U_i(\theta)}{\partial\theta} = \frac{2}{\theta^2} \\
\text{Věrohodnostní rovnice:} \quad & U(\widehat{\theta}_n) = 0 \quad \text{a odtud ihned} \quad \widehat{\theta}_n = 2/\overline{X}_n
\end{aligned}
$$

Jediným řešením věrohodnostní rovnice je $\widehat{\theta}_n = 2/\overline{X}_n$. Je to maximálně věrohodný odhad, neboť jak lze snadno ověřit, $\ell(\theta)$ je konkávní.

(ii)

Jelikož $\widehat{\theta}_n$ je maximálně věrohodný odhad a jsou splněny podmínky regularity, jeho asymptotické rozdělení je $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, 1/I(\theta))$. Takže

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, \theta^2/2).$$

(iii)

Je-li θ skutečný parametr, pak $n^{-1/2}U(\theta) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, I(\theta))$. Tudíž Raova testová statistika $R_n = [nI(\theta_0)]^{-1}U^2(\theta_0)$ za platnosti $H_0 : \theta = \theta_0$ konverguje v distribuci k rozdělení χ^2_1.

Pro $\theta_0 = 2$ tedy dostáváme

$$R_n = \frac{4}{2n}\Big(\frac{2n}{2} - \sum_{i=1}^n X_i\Big)^2 = \frac{2}{n}\Big(n - \sum_{i=1}^n X_i\Big)^2.$$

Hypotézu zamítneme na asymptotické hladině α, pokud $R_n \geq \chi^2_1(1-\alpha)$, kde $\chi^2_1(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil rozdělení χ^2_1.

(iv)

Je-li θ skutečný parametr, pro věrohodnostní poměr $L(\widehat{\theta}_n)/L(\theta)$ platí $2\log[L(\widehat{\theta}_n)/L(\theta)] \xrightarrow{D} \chi^2_1$. Tudíž testová statistika pro test poměrem věrohodností $\lambda_n = 2[\ell(\widehat{\theta}_n) - \ell(\theta_0)]$ za platnosti $H_0 : \theta = \theta_0$ konverguje v distribuci k rozdělení χ^2_1.

Pro $\theta_0 = 2$ tedy dostáváme

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= 2\Big[2n\log\widehat{\theta}_n + \sum_{i=1}^n \log X_i - \widehat{\theta}_n\sum_{i=1}^n X_i - 2n\log 2 - \sum_{i=1}^n \log X_i + 2\sum_{i=1}^n X_i\Big] \\
&= 4n\Big[\log\frac{\widehat{\theta}_n}{2} - 1 + \frac{2}{\widehat{\theta}_n}\Big],
\end{aligned}
$$

neboť $\widehat{\theta}_n \sum_{i=1}^{n} X_i = 2n$.

Hypotézu zamítneme na asymptotické hladině α, pokud $\lambda_n \geq \chi_1^2(1-\alpha)$, kde $\chi_1^2(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil rozdělení χ_1^2.

Příklad 4 (25 bodů)

1. Nechť náhodná veličina L má rozdělení s distribuční funkcí F. Potom hodnota v riziku na úrovni $1-\alpha$ je definována jako α-kvantil rozdělení L:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = u_L(\alpha) = \inf\{x : F(x) \geq \alpha\}.$$

2. Nejprve vyjádříme distribuční funkci F

$$F(x;\mu,\beta) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{|t-\mu|}{\beta}}}{2\beta}\, dt,$$

z čehož

$$F(x;\mu,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x-\mu}{\beta}} & x < \mu \\ 1-\frac{1}{2}e^{\frac{\mu-x}{\beta}} & x \geq \mu \end{cases}.$$

Distribuční funkce je spojitá rostoucí, kvantilová funkce je tedy funkcí k ní inverzní:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = u_L(\alpha) = \begin{cases} \mu + \beta\ln(2\alpha) & 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \mu - \beta\ln(2(1-\alpha)) & \frac{1}{2} < \alpha < 1 \end{cases}.$$

3. Dané úrovni $1/2e$ odpovídá $\alpha = 1 - 1/2e > \frac{1}{2}$. Z předchozího vzorce postupně dostaneme

$$\mathrm{VaR}_{1-1/2e}(L) = \mu - \beta\ln(2\cdot\frac{1}{2e}) = \mu - \beta\ln(e^{-1}) = \mu + \beta.$$

Po dosazení dostaneme $-0.0007 + 0.014 = 0.0133$.