

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2014
Studijní program Fyzika
obor Učitelství fyziky – matematiky pro střední školy
Studijní program Učitelství pro základní školy
- obor Učitelství fyziky – matematiky pro 2. stupeň základních škol

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right|.$$

- (i) Určete definiční obor funkce f .
- (ii) Zkoumejte spojitost funkce f .
- (iii) Vypočítejte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f .
- (iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda má funkce f lokální extrémy - pokud ano, určete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
- (v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f .
- (vi) Určete asymptoty funkce f .
- (vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f .

Příklad 2 (25 bodů)

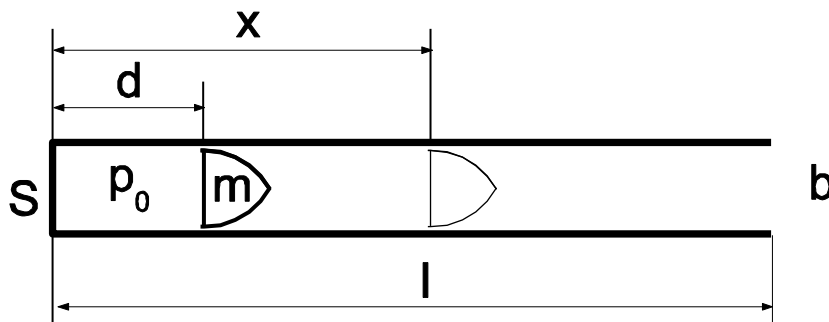
Spočítejte determinant reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ a+3 & b & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

v závislosti na parametrech a, b . Rozhodněte, pro která a, b je matice A regulární.

Příklad 3 (25 bodů)

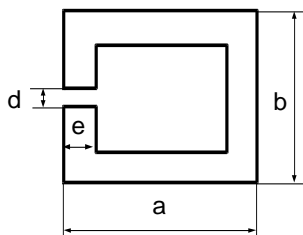
Zjednodušený model výstřelu ze vzduchovky si představme podle obr. 1. Hlaveň je na jednom konci uzavřena, na počátku je střela v klidu ve vzdálenosti d od tohoto konce a prostor mezi tímto koncem a střelou vyplňuje vzduch stlačený na tlak p_0 . Střela je urychlována tlakem rozepínajícího se vzduchu. Předpokládejte, že rozepínání lze pokládat za kvazistatický adiabatický děj v ideálním plynu a že z opačné strany působí na střelu konstantní barometrický tlak okolního vzduchu b . Hmotnost střely je m , průřez hlavě S a její délka l . Tření zanedbejte. Vypočítejte rychlost v_1 , se kterou střela opustí hlavě. Jak lze můžete upravit výsledný vzorec na základě skutečnosti, že vzduch se skládá (téměř zcela) z dvouatomových molekul?



Obr. 1.

Příklad 4 (25 bodů)

Železné jádro tvaru podle obrázku je opatřeno mezerou toušťky d , průřez jádra je $e \cdot f$ (f je rozměr jádra ve směru kolmém k nákresně), Jádro je opatřeno cívkou s vinutím s N závitů, kterými protéká střídavý proud s amplitudou I , odpor vinutí je R . Určete



a) amplitudu indukce B střídavého magnetického pole v mezeře

b) amplitudu U střídavého napětí připojeného k vinutí cívky.

Předpokládejte, že materiál jádra lze v daném režimu popsat konstantní hodnotou relativní permeability μ_r , a zanedbejte rozptylová pole a ztráty vířivými proudy v jádře.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2014
Studijní program Fyzika
obor Učitelství fyziky – matematiky pro střední školy
Studijní program Učitelství pro základní školy
- obor Učitelství fyziky – matematiky pro 2. stupeň základních škol

Varianta A - řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right|.$$

- (i) Určete definiční obor funkce f .
- (ii) Zkoumejte spojitost funkce f .
- (iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f .
- (iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda má funkce f lokální extrém - pokud ano, určete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
- (v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f .
- (vi) Určete asymptoty funkce f .
- (vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f .

Příklad 1 (25 bodů) - řešení

Viz řešení příkladu 2 z přijímací zkoušky Matematika magisterské studium.

Příklad 2 (25 bodů)

Spočítejte determinant reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ a+3 & b & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

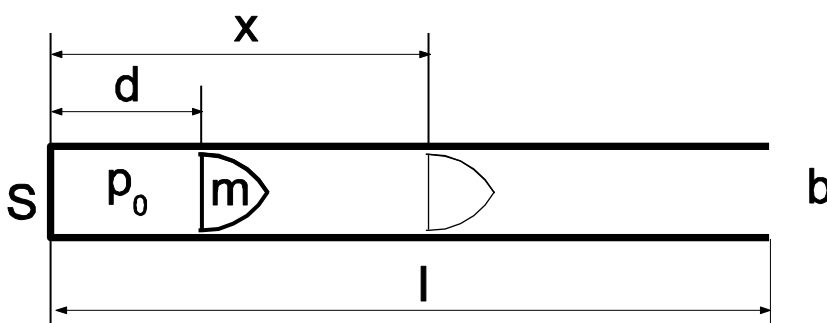
v závislosti na parametrech a, b . Rozhodněte, pro která a, b je matice A regulární.

Příklad 2 (25 bodů) – řešení

Viz řešení příkladu 4 z přijímací zkoušky Matematika magisterské studium.

Příklad 3 (25 bodů)

Zjednodušený model výstřelu ze vzduchovky si představme podle obr. 1. Hlaveň je na jednom konci uzavřena, na počátku je střela v klidu ve vzdálenosti d od tohoto konce a prostor mezi tímto koncem a střelou vyplňuje vzduch stlačený na tlak p_0 . Střela je urychlována tlakem rozepínajícího se vzduchu. Předpokládejte, že rozepínání lze pokládat za kvazistatický adiabatický děj v ideálním plynu a že z opačné strany působí na střelu konstantní barometrický tlak okolního vzduchu b . Hmotnost střely je m , průřez hlavě S a její délka l . Tření zanedbejte. Vypočítejte rychlost v_1 , se kterou střela opustí hlavě. Jak lze můžete upravit výsledný vzorec na základě skutečnosti, že vzduch se skládá (téměř zcela) z dvouatomových molekul?



Obr. 1.

Příklad 3 (25 bodů) – řešení

Pro adiabatický děj platí vztah

(3 body) $pV^\kappa = \text{konstanta},$ (1)

kde V je objem plynu, p odpovídající tlak a $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ t. zv. Poissonova konstanta, rovná poměru

tepelných kapacit plynu při konstantním tlaku a konstantním objemu. Podle tohoto vztahu se tlak plynu mění s pohybem střely: je-li na počátku při objemu $V_0 = Sd$ tlak plynu p_0 , při střele ve vzdálenosti x od uzavřeného konce hlavě je objem $V = Sx$ a tedy tlak

(3 body)
$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\kappa = p_0 \left(\frac{d}{x} \right)^\kappa$$
 (2)

Odečteme-li ještě barometrický tlak b , působící na střelu z opačné strany, můžeme pro celkovou sílu $F(x)$ působící na střelu ve vzdálenosti x psát

(3 body)
$$F(x) = S \left[p_0 \left(\frac{d}{x} \right)^\kappa - b \right]$$
 (3)

Pokud bychom vyšli z pohybové rovnice pro střelu

(3 body)
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$
 (4)

je vhodné postupovat standardně jako při odvození zákona zachování energie: rovnici vynásobíme rychlostí $v = \frac{dx}{dt}$ a integrujeme podle času od počátku (pro $t = 0$ je $x = d$ a $v = 0$) do okamžiku

opuštění hlavně t_1 (potom $x = l$ a $v = v_1$). Dostaneme

(3 body)
$$\frac{m}{2} v_1^2 = \int_0^{l_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) dt = \int_d^l F(x) dx \quad (5)$$

Pokud by adept namísto odvození (vztahy (4) až (5)) uvedl přímo něco podobného vztahu (5) s vysvětlením, že změna kinetické energie se musí rovnat práci, kterou síla vykoná, asi by mohl také získat odpovídající počet 6 bodů.

Pokud vyhodnotíme poslední integrál, dostáváme

$$\frac{m}{2} v_1^2 = S \left[p_0 d^\kappa \frac{1^{1-\kappa} - d^{1-\kappa}}{1-\kappa} - b(1-d) \right] \quad (6)$$

z čehož plyne pro rychlost

$$v_1 = \sqrt{\frac{2S}{m} \left[p_0 d^\kappa \frac{1^{1-\kappa} - d^{1-\kappa}}{1-\kappa} - b(1-d) \right]} \quad (7)$$

A vzhledem k tomu, že $\kappa > 1$, je vhodná ještě úprava např.

(5 bodů)
$$v_1 = \sqrt{\frac{2S}{m} \left[\left(1 - \left(\frac{d}{l} \right)^{\kappa-1} \right) \frac{p_0 d}{\kappa-1} - b(1-d) \right]} \quad (8)$$

Pro ideální plyn s dvouatomovými molekulami (5 stupňů volnosti) plyne z ekvipartičního teoremu pro molární tepelnou kapacitu: $C_v = \frac{5}{2}R$, z Mayerova vztahu pak $C_p = C_v + R = \frac{7}{2}R$, takže

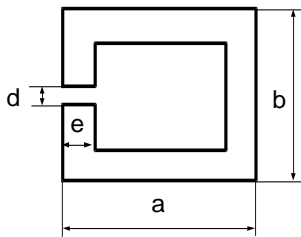
(3 body)
$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} \quad (9)$$

Po dosazení této hodnoty dostaneme konečně

(2 body)
$$v_1 = \sqrt{\frac{2S}{m} \left[\left(1 - \left(\frac{d}{l} \right)^{0.4} \right) \frac{p_0 d}{0.4} - b(1-d) \right]} \quad (10)$$

Příklad 4 (25 bodů)

Železné jádro tvaru podle obrázku je opatřeno mezerou tloušťky d , průřez jádra je $e \cdot f$ (f je rozměr jádra ve směru kolmém k nákresně), jádro je opatřeno cívkou s vinutím s N závitů, kterými protéká střídavý proud s amplitudou I , odpor vinutí je R . Určete



a) amplitudu indukce B střídavého magnetického pole v mezeře

b) amplitudu U střídavého napětí připojeného k vinutí cívky.

Předpokládejte, že materiál jádra lze v daném režimu popsat konstantní hodnotou relativní permeability μ_r , a zanedbejte rozptylová pole a ztráty vířivými proudy v jádře.

Příklad 4 (25 bodů) - řešení

Podle předpokladu prochází celým magnetickým obvodem stejný indukční tok

(3 body)
$$\Phi = B e f \quad (1)$$

Reluktance vzduchové mezery je dána vztahem

(3 body)
$$R_{mm} = d \frac{d}{\mu_0 e f} \quad (2)$$

a jelikož délka střední siločáry v železe v jádře je $2(a - f) + 2(b - f) - d$, je reluktance této části magnetického obvodu

(3 body)
$$R_{mj} = \frac{2(a + b - 2f) - d}{\mu_r \mu_0 e f} \quad (3)$$

Celková reluktance je tudíž $R_m = R_{mm} + R_{mj} = \frac{(\mu_r - 1)d + 2(a + b - 2f)}{\mu_r \mu_0 e f} \quad (4)$

a při známé magnetomotorické síle $E_m = NI$ můžeme podle Hopkinsonova zákona vypočítat indukční tok magnetickým obvodem

(4 body)
$$\Phi = \frac{NI}{R_m} = \frac{\mu_r \mu_0 e f NI}{(\mu_r - 1)d + 2(a + b - 2f)} \quad (5)$$

a tím také amplitudu magnetické indukce

(4 body)
$$B = \frac{\Phi}{e f} = \frac{\mu_r \mu_0 NI}{(\mu_r - 1)d + 2(a + b - 2f)} \quad (6)$$

Napětí U indukované na vinutí, rovné záporně vzaté časové derivaci indukčního toku,

(3 body)
$$U_{Ii} = -i\omega\Phi \quad (7)$$

je o 90 stupňů fázově posunuto proti napětí vznikajícímu na odporu vinutí $U_R = RI$, takže se skládají jako dvě navzájem kolmé složky a amplituda celkového napětí na vinutí je

(5 bodů)
$$U = \sqrt{U_R^2 + U_I^2} = I \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega \mu_r \mu_0 e f N}{(\mu_r - 1)d + 2(a + b - 2f)} \right)^2} \quad (8)$$