Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2014
Studijní program Fyzika
obor Učitelství fyziky – matematiky pro střední školy
Studijní program Učitelství pro základní školy
- obor Učitelství fyziky – matematiky pro 2. stupeň základních škol

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Funkce *f* je dána předpisem

$$f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| .$$

(i) Určete definiční obor funkce *f*.
(ii) .Zkoumejte spojitost funkce *f*.
(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce *f*.
(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda má funkce *f* lokální extrémy - pokud ano, určete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce *f*.
(vi) Určete asymptoty funkce *f*.
(vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce *f*.

Příklad 2 (25 bodů)

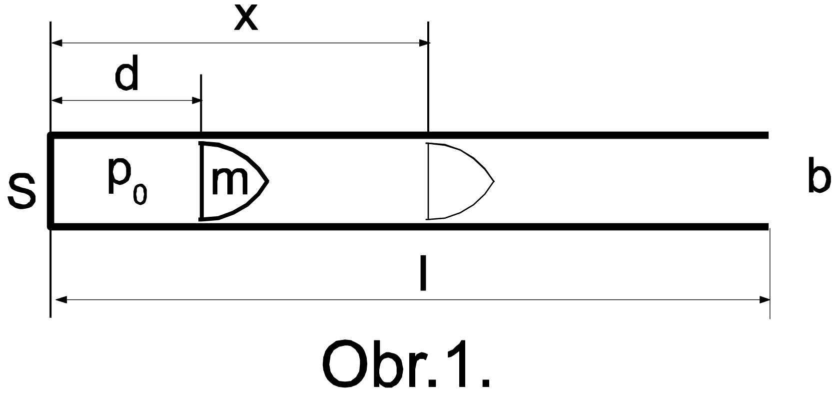
Spočítejte determinant reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ a+3 & b & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

v závislosti na parametrech *a, b*. Rozhodněte, pro která *a*, *b* je matice *A* regulární.

Příklad 3 (25 bodů)

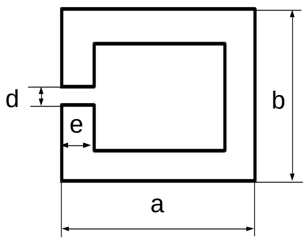
Zjednodušený model výstřelu ze vzduchovky si představme podle obr. 1. Hlaveň je na jednom konci uzavřena, na počátku je střela v klidu ve vzdálenosti d od tohoto konce a prostor mezi tímto koncem a střelou vyplňuje vzduch stlačený na tlak p_0. Střela je urychlována tlakem rozepínajícího se vzduchu. Předpokládejte, že rozepínání lze pokládat za kvazistatický adiabatický.děj v ideálním plynu a že z opačné strany působí na střelu konstantní barometrický tlak okolního vzduchu b. Hmotnost střely je m, průřez hlavně S a její délka l,. Tření zanedbejte. Vypočítejte rychlost v_1, se kterou střela opustí hlaveň. Jak lze můžete upravit výsledný vzorec na základě skutečnosti, že vzduch se skládá (téměř zcela) z dvouatomových molekul?



Obr.1.

Příklad 4 (25 bodů)

Železné jádro tvaru podle obrázku je opatřeno mezerou toušťky d, průřez jádra je $e.f$ (f je rozměr jádra ve směru kolmém k nákresně), Jádro je opatřeno cívkou s vinutím s N závity, kterými protéká střídavý proud s amplitudou I, odpor vinutí je R. .Určete



a) amplitudu indukce B střídavého magnetického pole v mezeře

b) amplitudu U střídavého napětí připojeného k vinutí cívky.

Předpokládejte, že materiál jádra lze v daném režimu popsat konstantní hodnotou relativní permeability μ_r a zanedbejte rozptylová pole a ztráty vířivými proudy v jádře.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2014
Studijní program Fyzika
obor Učitelství fyziky – matematiky pro střední školy
Studijní program Učitelství pro základní školy
- obor Učitelství fyziky – matematiky pro 2. stupeň základních škol

Varianta A - řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| .$$

(i) Určete definiční obor funkce f.
(ii) .Zkoumejte spojitost funkce f.
(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.
(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda má funkce f lokální extrémy - pokud ano, určete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f.
(vi) Určete asymptoty funkce f.
(vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 1 (25 bodů) - řešení

Viz řešení příkladu 2 z přijímací zkoušky Matematika magisterské studium.

Příklad 2 (25 bodů)

Spočítejte determinant reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ a+3 & b & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

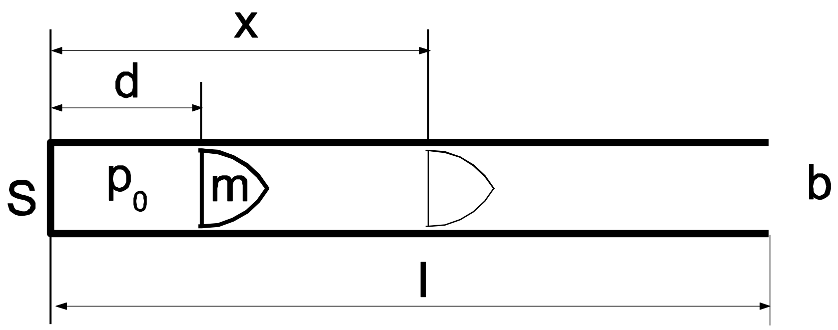
v závislosti na parametrech a, b. Rozhodněte, pro která a, b je matice A regulární.

Příklad 2 (25 bodů) – řešení

Viz řešení příkladu 4 z přijímací zkoušky Matematika magisterské studium.

Příklad 3 (25 bodů)

Zjednodušený model výstřelu ze vzduchovky si představme podle obr. 1. Hlaveň je na jednom konci uzavřena, na počátku je střela v klidu ve vzdálenosti d od tohoto konce a prostor mezi tímto koncem a střelou vyplňuje vzduch stlačený na tlak p_0. Střela je urychlována tlakem rozepínajícího se vzduchu. Předpokládejte, že rozepínání lze pokládat za kvazistatický adiabatický.děj v ideálním plynu a že z opačné strany působí na střelu konstantní barometrický tlak okolního vzduchu b. Hmotnost střely je m, průřez hlavně S a její délka l,. Tření zanedbejte. Vypočítejte rychlost v_1, se kterou střela opustí hlaveň. Jak lze můžete upravit výsledný vzorec na základě skutečnosti, že vzduch se skládá (téměř zcela) z dvouatomových molekul?



Obr.1.

Příklad 3 (25 bodů) – řešení

Pro adiabatický děj platí vztah

(3 body)
$$pV^{\kappa} = \text{konstanta}, \tag{1}$$

kde V je objem plynu, p odpovídající tlak a $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ t. zv. Poissonova konstanta, rovná poměru tepelných kapacit plynu při konstantním tlaku a konstantním objemu. Podle tohoto vztahu se tlak plynu mění s pohybem střely: je-li na počátku při objemu $V_0 = Sd$ tlak plynu p_0, při střele ve vzdálenosti x od uzavřeného konce hlavně je objem $V = Sx$ a tedy tlak

(3 body)
$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa} = p_0 \left(\frac{d}{x}\right)^{\kappa} \tag{2}$$

Odečteme-li ještě barometrický tlak b, působící na střelu z opačné strany, můžeme pro celkovou sílu $F(x)$ působící na střelu ve vzdálenosti x psát

(3 body)
$$F(x) == S\left[p_0 \left(\frac{d}{x}\right)^{\kappa} - b\right] \tag{3}$$

Pokud bychom vyšli z pohybové rovnice pro střelu

(3 body)
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \tag{4}$$

je vhodné postupovat standardně jako při odvození zákona zachování energie: rovnici vynásobíme rychlostí $v = \frac{dx}{dt}$ a integrujeme podle času od počátku (pro $t = 0$ je $x = d$ a $v = 0$) do okamžiku opuštění hlavně t_1 (potom $x = l$ a $v = v_1$). Dostaneme

(3 body)

$$\frac{m}{2} v_1^{\ 2} = \int_0^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2} v^2\right) dt = \int_d^l F(x)\, dx \qquad (5)$$

Pokud by adept namísto odvození (vztahy (4) až (5)) uvedl přímo něco podobného vztahu (5) s vysvětlením, že změna kinetické energie se musí rovnat práci, kterou síla vykoná, asi by mohl také získat odpovídající počet 6 bodů.

Pokud vyhodnotíme poslední integrál, dostáváme

$$\frac{m}{2} v_1^{\ 2} = S\left[p_0 d^{\kappa} \frac{l^{1-\kappa} - d^{1-\kappa}}{1-\kappa} - b(l-d)\right] \qquad (6)$$

z čehož plyne pro rychlost

$$v_1 = \sqrt{\frac{2S}{m}\left[p_0 d^{\kappa} \frac{l^{1-\kappa} - d^{1-\kappa}}{1-\kappa} - b(l-d)\right]} \qquad (7)$$

A vzhledem k tomu,že $\kappa > 1$, je vhodná ještě úprava např.

(5 bodů)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2S}{m}\left[\left(1 - \left(\frac{d}{l}\right)^{\kappa-1}\right)\frac{p_0 d}{\kappa - 1} - b(l-d)\right]} \qquad (8)$$

Pro ideální plyn s dvouatomovými molekulami (5 stupňů volnosti) plyne z ekvipartičního teoremu pro molární tepelnou kapacitu: $C_v = \frac{5}{2} R$, z Mayerova vztahu pak $C_p = C_v + R = \frac{7}{2} R$, takže

(3 body)

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} \qquad (9)$$

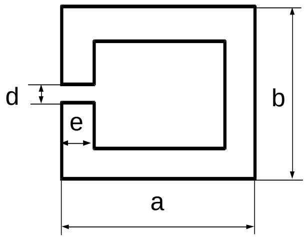
Po dosazení této hodnoty dostaneme konečně

(2 body)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2S}{m}\left[\left(1 - \left(\frac{d}{l}\right)^{0.4}\right)\frac{p_0 d}{0.4} - b(l-d)\right]} \qquad (10\}$$

Příklad 4 (25 bodů)

Železné jádro tvaru podle obrázku je opatřeno mezerou tloušťky *d*, průřez jádra je *e.f* (*f* je rozměr jádra ve směru kolmém k nákresně), Jádro je opatřeno cívkou s vinutím s *N* závity, kterými protéká střídavý proud s amplitudou *I*, odpor vinutí je *R*. .Určete



a) amplitudu indukce B střídavého magnetického pole v mezeře

b) amplitudu U střídavého napětí připojeného k vinutí cívky.

Předpokládejte, že materiál jádra lze v daném režimu popsat konstantní hodnotou relativní permeability μ_r a zanedbejte rozptylová pole a ztráty vířivými proudy v jádře.

Příklad 4 (25 bodů) - řešení

Podle předpokladu prochází celým magnetickým obvodem stejný indukční tok

(3 body)
$$\Phi = Bef \qquad (1)$$

Reluktance vzduchové mezery je dána vztahem

(3 body)
$$R_{mm} = d\,\frac{d}{\mu_0 ef} \qquad (2).$$

a jelikož délka střední siločáry v železe v jádře je $2(a-f)+2(b-f)-d$, je reluktance této části magnetického obvodu

(3 body)
$$R_{mj} = \frac{2(a+b-2f)-d}{\mu_r\mu_0 ef} \qquad (3)$$

Celková reluktance je tudíž $R_m = R_{mm} + R_{mj} = \dfrac{(\mu_r-1)d + 2(a+b-2f)}{\mu_r\mu_0 ef}$ (4)

a při známé magnetomotorické síle $E_m = NI$ můžeme podle Hopkinsonova zákona vypočítat indukční tok magnetickým obvodem

(4 body)
$$\Phi = \frac{NI}{R_m} = \frac{\mu_r\mu_0 efNI}{(\mu_r-1)d + 2(a+b-2f)} \qquad (5)$$

a tím také amplitudu magnetické indukce

(4 body)
$$B = \frac{\Phi}{ef} = \frac{\mu_r\mu_0 NI}{(\mu_r-1)d + 2(a+b-2f)} \qquad (6)$$

Napětí U indukované na vinutí, rovné záporně vzaté časové derivaci indukčního toku,

(3 body)
$$U_{Ii} = -i\omega\Phi \qquad (7)$$

je o 90 stupňů fázově posunuto proti napětí vznikajícímu na odporu vinutí $U_R = RI$, takže se skládají jako dvě navzájem kolmé složky a amplituda celkového napětí na vinutí je

(5 bodů)
$$U = \sqrt{U_R^2 + U_I^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega\mu_r\mu_0 efN}{(\mu_r-1)d + 2(a+b-2f)}\right)^2} \qquad (8)$$