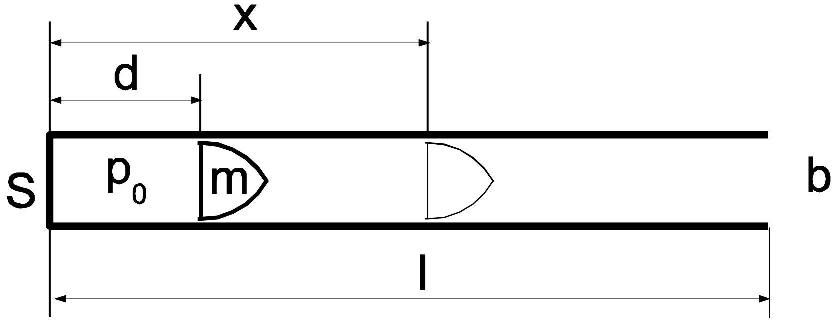
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2014

Studijní program Fyzika - všechny obory kromě Učitelství fyziky – matematiky pro střední školy

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

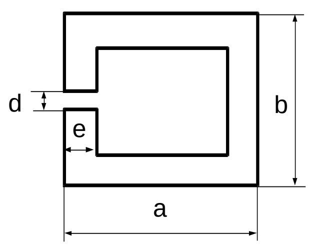
Zjednodušený model výstřelu ze vzduchovky si představme podle obr. 1. Hlaveň je na jednom konci uzavřena, na počátku je střela v klidu ve vzdálenosti d od tohoto konce a prostor mezi tímto koncem a střelou vyplňuje vzduch stlačený na tlak p_0. Střela je urychlována tlakem rozepínajícího se vzduchu. Předpokládejte, že rozepínání lze pokládat za kvazistatický adiabatický.děj v ideálním plynu a že z opačné strany působí na střelu konstantní barometrický tlak okolního vzduchu b. Hmotnost střely je m, průřez hlavně S a její délka l,. Tření zanedbejte. Vypočítejte rychlost v_1, se kterou střela opustí hlaveň. Jak lze můžete upravit výsledný vzorec na základě skutečnosti, že vzduch se skládá (téměř zcela) z dvouatomových molekul?



Obr.1.

Příklad 2 (25 bodů)

Železné jádro tvaru podle obrázku je opatřeno mezerou tloušťky *d*, průřez jádra je *e.f* (*f* je rozměr jádra ve směru kolmém k nákresně), Jádro je opatřeno cívkou s vinutím s *N* závity, kterými protéká střídavý proud s amplitudou *I*, odpor vinutí je *R*. .Určete



a) amplitudu indukce B střídavého magnetického pole v mezeře

b) amplitudu U střídavého napětí připojeného k vinutí cívky.

Předpokládejte, že materiál jádra lze v daném režimu popsat konstantní hodnotou relativní permeability μ_r a zanedbejte rozptylová pole a ztráty vířivými proudy v jádře.

Příklad 3 (25 bodů)

Na rovinné rozhraní dvou různých lineárních, homogenních, izotropních neabsorbujících prostředí o indexech lomu n_1 a n_2 dopadá rovinná monochromatická vlna s frekvencí ω a vlnovým vektorem **k** polarizovaná v rovině dopadu (viz obrázek).

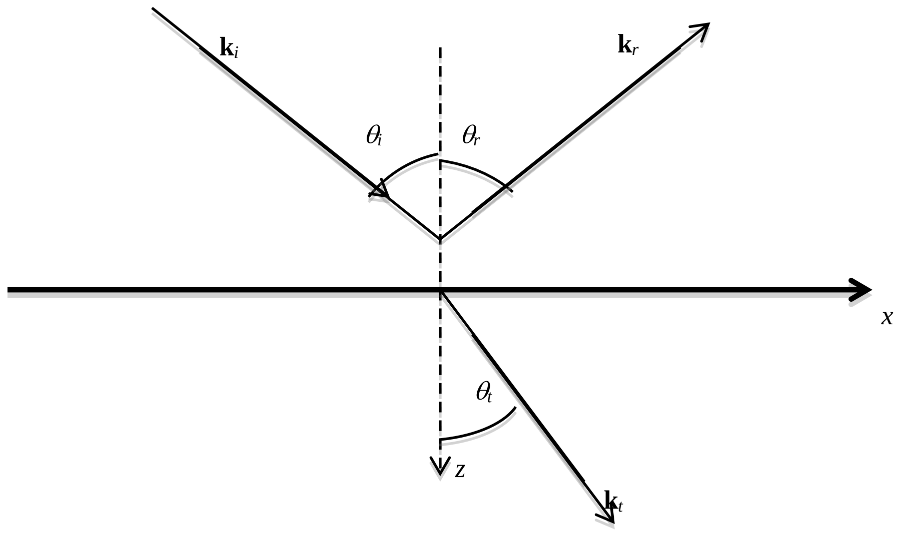
a) Jaké okrajové podmínky na rozhraní těchto dvou prostředí musí splňovat vektory intenzity elektrického a magnetického pole?

b) Jaký vztah platí mezi vektory intenzity elektrického a magnetického pole a jejich velikostmi?

c) Odvoďte Fresnelův reflexní koeficient.

d) Co je to Brewsterův úhel a jak je určen?

e) Co je to mezní úhel a jak je určen?



Příklad 4 (25 bodů)

Polymer krystalizuje v kubické mříži s mřížovou konstantou a = 120 nm. Rozhodněte, zda bude možné pozorovat difrakční maxima od rovin typu hkl ~ 001 a 221, pokud zdrojem bude elektromagnetické záření emitované vodíkovým atomem při přechodu elektronu z kvantové dráhy n = 3 na dráhu

a) n = 2

b) n = 1.

(Pomůcka: Planckova konstanta h = $6{,}6\cdot10^{-34}$ J·s, rychlost světla c = $3\cdot10^{8}$ $m\cdot s^{-1}$ a Rydbergova konstanta $R = 1.097\cdot10^{7}\,m^{-1}$)

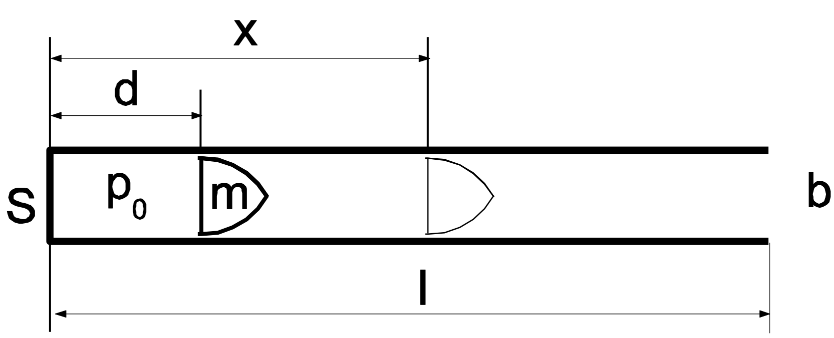
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2014

Studijní program Fyzika - všechny obory kromě Učitelství fyziky – matematiky pro střední školy

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Zjednodušený model výstřelu ze vzduchovky si představme podle obr. 1. Hlaveň je na jednom konci uzavřena, na počátku je střela v klidu ve vzdálenosti d od tohoto konce a prostor mezi tímto koncem a střelou vyplňuje vzduch stlačený na tlak p_0. Střela je urychlována tlakem rozepínajícího se vzduchu. Předpokládejte, že rozepínání lze pokládat za kvazistatický adiabatický.děj v ideálním plynu a že z opačné strany působí na střelu konstantní barometrický tlak okolního vzduchu b. Hmotnost střely je m, průřez hlavně S a její délka l,. Tření zanedbejte. Vypočítejte rychlost v_1, se kterou střela opustí hlaveň. Jak lze můžete upravit výsledný vzorec na základě skutečnosti, že vzduch se skládá (téměř zcela) z dvouatomových molekul?



Obr.1.

Příklad 1 (25 bodů) – řešení

Pro adiabatický děj platí vztah

(3 body)
$$pV^{\kappa} = \text{konstanta}, \tag{1}$$

kde V je objem plynu, p odpovídající tlak a $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ t. zv. Poissonova konstanta, rovná poměru tepelných kapacit plynu při konstantním tlaku a konstantním objemu. Podle tohoto vztahu se tlak plynu mění s pohybem střely: je-li na počátku při objemu $V_0 = Sd$ tlak plynu p_0, při střele ve vzdálenosti x od uzavřeného konce hlavně je objem $V = Sx$ a tedy tlak

(3 body)
$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa} = p_0 \left(\frac{d}{x}\right)^{\kappa} \tag{2}$$

Odečteme-li ještě barometrický tlak b, působící na střelu z opačné strany, můžeme pro celkovou sílu $F(x)$ působící na střelu ve vzdálenosti x psát

(3 body)
$$F(x) == S\left[p_0 \left(\frac{d}{x}\right)^{\kappa} - b\right] \tag{3}$$

Pokud bychom vyšli z pohybové rovnice pro střelu

(3 body)
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \tag{4}$$

je vhodné postupovat standardně jako při odvození zákona zachování energie: rovnici vynásobíme rychlostí $v = \frac{dx}{dt}$ a integrujeme podle času od počátku (pro $t = 0$ je $x = d$ a $v = 0$) do okamžiku opuštění hlavně t_1 (potom $x = l$ a $v = v_1$). Dostaneme

(3 body)

$$\frac{m}{2} v_1^{\ 2} = \int_0^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2} v^2\right) dt = \int_d^l F(x)\, dx \tag{5}$$

Pokud by adept namísto odvození (vztahy (4) až (5)) uvedl přímo něco podobného vztahu (5) s vysvětlením, že změna kinetické energie se musí rovnat práci, kterou síla vykoná, asi by mohl také získat odpovídající počet 6 bodů.

Pokud vyhodnotíme poslední integrál, dostáváme

$$\frac{m}{2} v_1^{\ 2} = S\left[p_0 d^{\kappa} \frac{l^{1-\kappa} - d^{1-\kappa}}{1-\kappa} - b(l-d)\right] \tag{6}$$

z čehož plyne pro rychlost

$$v_1 = \sqrt{\frac{2S}{m}\left[p_0 d^{\kappa} \frac{l^{1-\kappa} - d^{1-\kappa}}{1-\kappa} - b(l-d)\right]} \tag{7}$$

A vzhledem k tomu,že $\kappa > 1$, je vhodná ještě úprava např.

(5 bodů)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2S}{m}\left[\left(1 - \left(\frac{d}{l}\right)^{\kappa-1}\right) \frac{p_0 d}{\kappa - 1} - b(l-d)\right]} \tag{8}$$

Pro ideální plyn s dvouatomovými molekulami (5 stupňů volnosti) plyne z ekvipartičního teoremu pro molární tepelnou kapacitu: $C_v = \frac{5}{2} R$, z Mayerova vztahu pak $C_p = C_v + R = \frac{7}{2} R$, takže

(3 body)

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} \tag{9}$$

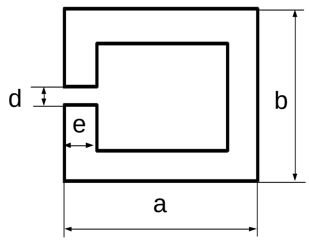
Po dosazení této hodnoty dostaneme konečně

(2 body)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2S}{m}\left[\left(1 - \left(\frac{d}{l}\right)^{0.4}\right) \frac{p_0 d}{0.4} - b(l-d)\right]} \qquad (10\}$$

Příklad 2 (25 bodů)

Železné jádro tvaru podle obrázku je opatřeno mezerou tloušťky *d*, průřez jádra je *e.f* (*f* je rozměr jádra ve směru kolmém k nákresně), Jádro je opatřeno cívkou s vinutím s *N* závity, kterými protéká střídavý proud s amplitudou *I*, odpor vinutí je *R*. .Určete



a) amplitudu indukce B střídavého magnetického pole v mezeře

b) amplitudu U střídavého napětí připojeného k vinutí cívky.

Předpokládejte, že materiál jádra lze v daném režimu popsat konstantní hodnotou relativní permeability μ_r a zanedbejte rozptylová pole a ztráty vířivými proudy v jádře.

Příklad 2 (25 bodů) - řešení

Podle předpokladu prochází celým magnetickým obvodem stejný indukční tok

(3 body) $$\Phi = Bef \qquad (1)$$

Reluktance vzduchové mezery je dána vztahem

(3 body) $$R_{mm} = d\frac{d}{\mu_0 ef} \qquad (2).$$

a jelikož délka střední siločáry v železe v jádře je $2(a-f)+2(b-f)-d$, je reluktance této části magnetického obvodu

(3 body) $$R_{mj} = \frac{2(a+b-2f)-d}{\mu_r\mu_0 ef} \qquad (3)$$

Celková reluktance je tudíž $R_m = R_{mm} + R_{mj} = \dfrac{(\mu_r - 1)d + 2(a+b-2f)}{\mu_r\mu_0 ef}$ (4)

a při známé magnetomotorické síle $E_m = NI$ můžeme podle Hopkinsonova zákona vypočítat indukční tok magnetickým obvodem

(4 body) $$\Phi = \frac{NI}{R_m} = \frac{\mu_r\mu_0 efNI}{(\mu_r - 1)d + 2(a+b-2f)} \qquad (5)$$

a tím také amplitudu magnetické indukce

(4 body) $$B = \frac{\Phi}{ef} = \frac{\mu_r\mu_0 NI}{(\mu_r - 1)d + 2(a+b-2f)} \qquad (6)$$

Napětí U indukované na vinutí, rovné záporně vzaté časové derivaci indukčního toku,

(3 body) $$U_{I_i} = -i\omega\Phi \qquad (7)$$

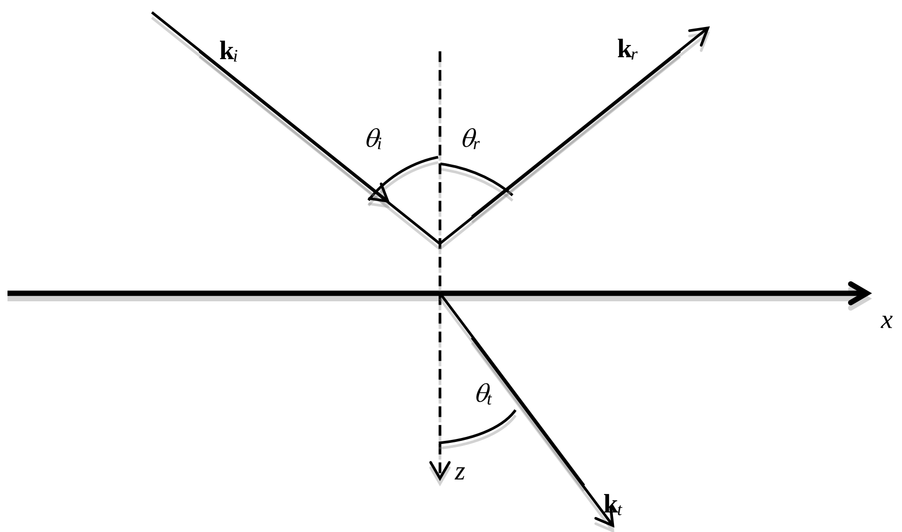
je o 90 stupňů fázově posunuto proti napětí vznikajícímu na odporu vinutí $U_R = RI$, takže se skládají jako dvě navzájem kolmé složky a amplituda celkového napětí na vinutí je

(5 bodů) $$U = \sqrt{U_R{}^2 + U_I{}^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega\mu_r\mu_0 efN}{(\mu_r - 1)d + 2(a+b-2f)}\right)^2} \qquad (8)$$

Příklad 3 (25 bodů)

Na rovinné rozhraní dvou různých lineárních, homogenních, izotropních neabsorbujících prostředí o indexech lomu n_1 a n_2 dopadá rovinná monochromatická vlna s frekvencí ω a vlnovým vektorem **k** polarizovaná v rovině dopadu (viz obrázek).

a) Jaké okrajové podmínky na rozhraní těchto dvou prostředí musí splňovat vektory intenzity elektrického a magnetického pole?
b) Jaký vztah platí mezi vektory intenzity elektrického a magnetického pole a jejich velikostmi?
c) Odvoďte Fresnelův reflexní koeficient.
d) Co je to Brewsterův úhel a jak je určen?
e) Co je to mezní úhel a jak je určen?



Příklad 3 (25 bodů) -řešení
a) Tečné složky vektorů intenzity elektrického a magnetického pole musí být na rozhraní dvou izotropních neabsorbujících prostředí spojité. Tj.

$$E_{ix} - E_{rx} = E_{tx},$$

$$H_{iy} + H_{ry} = H_{ty},$$

pro $z = 0$. Po úpravě

$$E_i \cos\theta_i - E_r \cos\theta_r = E_t \cos\theta_t,$$

$$H_i + H_r = H_t.$$

Indexy i,r a t označují dopadající, odraženou a prošlou vlnu.
(5 bodů)

b) Z Maxwellovy rovnice plyne pro rovinnou vlnu v neabsorbujícím prostředí

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$i\vec{k} \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad \Rightarrow \quad H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E$$

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = c\sqrt{\varepsilon\mu} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{n}{c\mu}E$$

(5 bodů)

c) Protože rozdíly v permeabilitě běžných optických prostředí bývají dosti malé, lze s použitím výsledků z bodu b) a a) napsat

$$n_1 E_i + n_1 E_r = n_2 E_t,$$

$$E_i \cos\theta_i - E_r \cos\theta_r = E_t \cos\theta_t.$$

Vyjádřením E_t z předchozích dvou rovnic a uvážením zákona odrazu ($\theta_i = \theta_r$) dostáváme

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t}.$$

S pomocí Snellova zákona a součtových vzorců lze tento vztah přepsat do tvaru

$$r = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)}.$$

(5 bodů)

d) Brewsterův úhel je úhel dopadu, při kterém vyhasíná odražená vlna polarizovaná v rovině dopadu, t. j. při němž $r = 0$. Tento případ nastává, pokud směr vlny odražené a lomené svírají pravý úhel.

$\theta_{iB} + \theta_t = \frac{\pi}{2}$. Ze Snellova zákona lomu plyne $\tan\theta_{iB} = \frac{n_2}{n_1}$.

(5 bodů)

e) Při odrazu na „opticky řidším“ prostředí ($n_2 < n_1$) může nastat případ, kdy $\theta_t = 90°$. Úhel dopadu, při kterém tento případ nastává, nazýváme mezním úhlem. Při větších úhlech pozorujeme úplný odraz, totální reflexi odrazu světla. Ze zákonu lomu dostáváme pro mezní úhel

$$n_1 \sin\theta_{iM} = n_2 \sin\frac{\pi}{2},$$

$$\sin\theta_{iM} = \frac{n_2}{n_1}.$$

(5 bodů)

Příklad 4 (25 bodů)

Polymer krystalizuje v kubické mříži s mřížovou konstantou a = 120 nm. Rozhodněte, zda bude možné pozorovat difrakční maxima od rovin typu *hkl* ~ 001 a 221, pokud zdrojem bude elektromagnetické záření emitované vodíkovým atomem při přechodu elektronu z kvantové dráhy n = 3 na dráhu
a) n = 2
b) n = 1.

(Pomůcka: Planckova konstanta h = $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J·s, rychlost světla c = $3 \cdot 10^{8}$ m·s^{-1} a Rydbergova konstanta $R = 1.097 \cdot 10^{7}\, m^{-1}$)

Příklad 4 (25 bodů) - řešení

vlnové délky určíme z Rydbergova vztahu

(4 body)
$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^{\,2}} - \frac{1}{n_2^{\,2}}\right)$$

(1 bod) pro přechod a) $3 \to 2$: $\frac{1}{\lambda} = 1.097 \cdot 10^{7} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = 1.097 \cdot 10^{7} \cdot \frac{5}{36}$

(1 bod) pro přechod b) $3 \to 1$: $\frac{1}{\lambda} = 1.097 \cdot 10^{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 1.097 \cdot 10^{7} \cdot \frac{8}{9}$

vzdálenost rovin typu *hkl* v kubické mříži

(4 body)
$$d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

(1 bod) typ 001 $d_{hkl} = a = 120\ nm$

(1 bod) typ 221 $d_{hkl} = \frac{120\ nm}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{120\ nm}{\sqrt{9}} = 40 nm$

Maximum bude pozorovatelné při úhlu θ, pokud bude splněna Braggova podmínka

(5 bodů) $n\lambda = 2 d_{hkl} \sin\theta, \quad n$ je celé číslo

Tedy pro roviny 001 vychází pro $\sin\theta$ v případě

(1 bod) a) $\sin\theta = \frac{n\lambda}{2 d_{hkl}} = n \frac{36}{5 \cdot 1.097 \cdot 10^{7} \cdot 240 \cdot 10^{-9}} = n \frac{36}{1.097 \cdot 12} = n \cdot \frac{3}{1.097}$,

(1 bod) b) $\sin\theta = n \frac{9}{8 \cdot 1.097 \cdot 10^{7} \cdot 240 \cdot 10^{-9}} = n \frac{3}{1.097 \cdot 6.4}$,

a pro roviny 221

(1 bod) a) $\sin\theta = \frac{n\lambda}{2 d_{hkl}} = n \frac{36}{5 \cdot 1.097 \cdot 10^{7} \cdot 80 \cdot 10^{-9}} = n \frac{36}{1.097 \cdot 4} = \frac{9}{1.097} \cdot n$,

(1 bod) b) $\sin\theta = n \frac{9}{8 \cdot 1.097 \cdot 10^{7} \cdot 240 \cdot 10^{-9}} = n \frac{9}{1.097 \cdot 6.4}$,

Vidíme, že v případě č.2 – kde jde o přechod mezi hladinami $3 \to 2$ a o roviny typu 221 – dostáváme (dokonce pro n=1 i 2) pro sinus nenulovou velikost v absolutní hodnotě menší než 1, pro úhel tedy máme reálné řešení a difrakci lze pozorovat. V ostatních případech sinus vychází (s výjimkou nulové hodnoty) v absolutní hodnotě větší než 1, reálné řešení pro úhel (kromě nuly) neexistuje a difrakce pozorovatelná není.

(4 body)