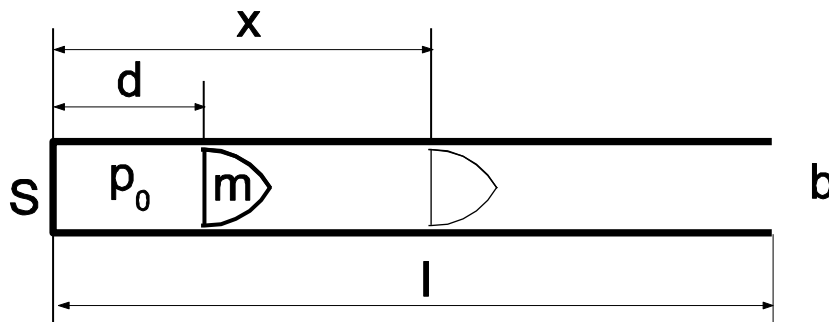


Příklad 1 (25 bodů)

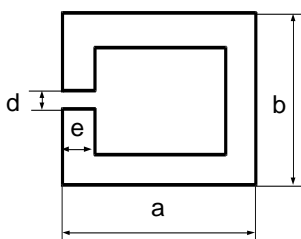
Zjednodušený model výstřelu ze vzduchovky si představme podle obr. 1. Hlaveň je na jednom konci uzavřena, na počátku je střela v klidu ve vzdálenosti d od tohoto konce a prostor mezi tímto koncem a střelou vyplňuje vzduch stlačený na tlak p_0 . Střela je urychlována tlakem rozepínajícího se vzduchu. Předpokládejte, že rozepínání lze pokládat za kvazistatický adiabatický děj v ideálním plynu a že z opačné strany působí na střelu konstantní barometrický tlak okolního vzduchu b . Hmotnost střely je m , průřez hlavě S a její délka l . Tření zanedbejte. Vypočítejte rychlost v_1 , se kterou střela opustí hlavě. Jak lze upravit výsledný vzorec na základě skutečnosti, že vzduch se skládá (téměř zcela) z dvouatomových molekul?



Obr.1.

Příklad 2 (25 bodů)

Železné jádro tvaru podle obrázku je opatřeno mezerou tloušťky d , průřez jádra je $e \cdot f$ (f je rozměr jádra ve směru kolmém k nákrešně). Jádro je opatřeno cívkou s vinutím s N závitů, kterými protéká střídavý proud s amplitudou I , odpor vinutí je R . Určete



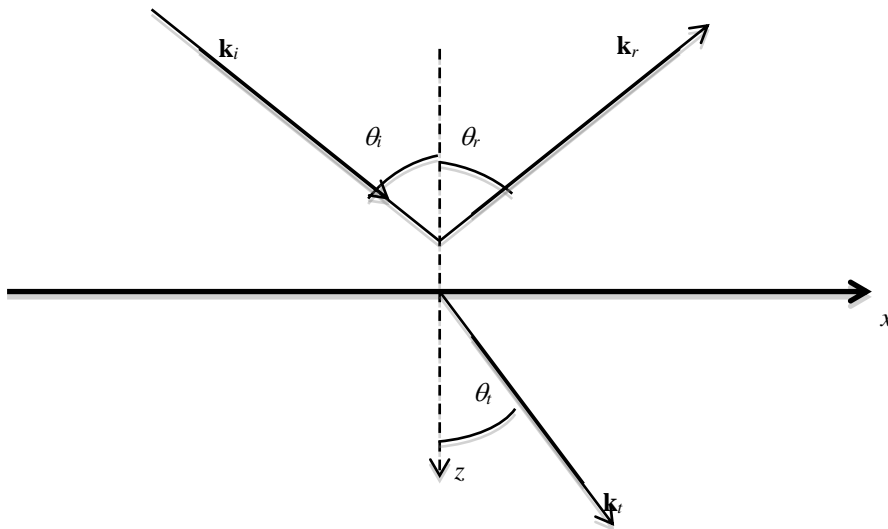
- amplitudu indukce B střídavého magnetického pole v mezeře
- amplitudu U střídavého napětí připojeného k vinutí cívky.

Předpokládejte, že materiál jádra lze v daném režimu popsat konstantní hodnotou relativní permeability μ_r a zanedbejte rozptylová pole a ztráty vířivými proudy v jádře.

Příklad 3 (25 bodů)

Na rovinné rozhraní dvou různých lineárních, homogenních, izotropních neabsorbujících prostředí o indexech lomu n_1 a n_2 dopadá rovinná monochromatická vlna s frekvencí ω a vlnovým vektorem \mathbf{k} polarizovaná v rovině dopadu (viz obrázek).

- Jaké okrajové podmínky na rozhraní těchto dvou prostředí musí splňovat vektory intenzity elektrického a magnetického pole?
- Jaký vztah platí mezi vektory intenzity elektrického a magnetického pole a jejich velikostmi?
- Odvoďte Fresnelův reflexní koeficient.
- Co je to Brewsterův úhel a jak je určen?
- Co je to mezní úhel a jak je určen?



Příklad 4 (25 bodů)

Polymer krystalizuje v kubické mříži s mřížovou konstantou $a = 120 \text{ nm}$. Rozhodněte, zda bude možné pozorovat difrakční maxima od rovin typu $hkl \sim 001$ a 221 , pokud zdrojem bude elektromagnetické záření emitované vodíkovým atomem při přechodu elektronu z kvantové dráhy $n = 3$ na dráhu

- a) $n = 2$
- b) $n = 1$.

(Pomůcka: Planckova konstanta $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, rychlost světla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a Rydbergova konstanta $R = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$)

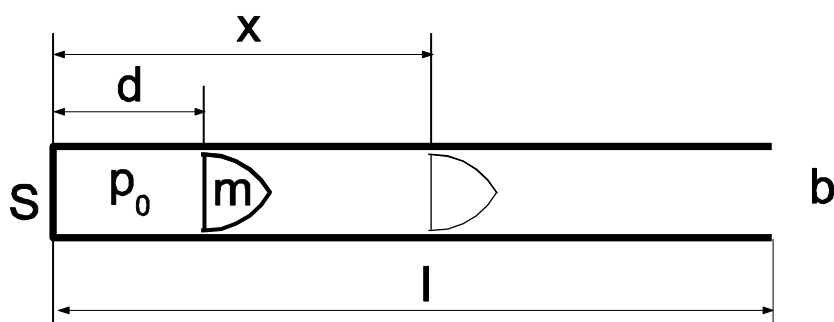
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2014

Studijní program Fyzika - všechny obory kromě Učitelství fyziky – matematiky pro střední školy

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Zjednodušený model výstřelu ze vzduchovky si představme podle obr. 1. Hlaveň je na jednom konci uzavřena, na počátku je střela v klidu ve vzdálenosti d od tohoto konce a prostor mezi tímto koncem a střelou vyplňuje vzduch stlačený na tlak p_0 . Střela je urychlována tlakem rozepínajícího se vzduchu. Předpokládejte, že rozepínání lze pokládat za kvazistatický adiabatický děj v ideálním plynu a že z opačné strany působí na střelu konstantní barometrický tlak okolního vzduchu b . Hmotnost střely je m , průřez hlavě S a její délka l . Tření zanedbejte. Vypočítejte rychlost v_1 , se kterou střela opustí hlavě. Jak lze můžete upravit výsledný vzorec na základě skutečnosti, že vzduch se skládá (téměř zcela) z dvouatomových molekul?



Obr. 1.

Příklad 1 (25 bodů) – řešení

Pro adiabatický děj platí vztah

(3 body)
$$pV^\kappa = \text{konstanta}, \quad (1)$$

kde V je objem plynu, p odpovídající tlak a $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ t. zv. Poissonova konstanta, rovná poměru tepelných

kapacit plynu při konstantním tlaku a konstantním objemu. Podle tohoto vztahu se tlak plynu mění s pohybem střely: je-li na počátku při objemu $V_0 = Sd$ tlak plynu p_0 , při střele ve vzdálenosti x od uzavřeného konce hlavě je objem $V = Sx$ a tedy tlak

(3 body)
$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\kappa = p_0 \left(\frac{d}{x} \right)^\kappa \quad (2)$$

Odečteme-li ještě barometrický tlak b , působící na střelu z opačné strany, můžeme pro celkovou sílu $F(x)$ působící na střelu ve vzdálenosti x psát

(3 body)
$$F(x) = S \left[p_0 \left(\frac{d}{x} \right)^\kappa - b \right] \quad (3)$$

Pokud bychom vyšli z pohybové rovnice pro střelu

(3 body)
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) \quad (4)$$

je vhodné postupovat standardně jako při odvození zákona zachování energie: rovnici vynásobíme rychlostí $v = \frac{dx}{dt}$ a integrujeme podle času od počátku (pro $t = 0$ je $x = d$ a $v = 0$) do okamžiku opuštění hlavně t_1 (potom $x = l$ a $v = v_1$). Dostaneme

(3 body)

$$\frac{m}{2} v_1^2 = \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) dt = \int_d^l F(x) dx \quad (5)$$

Pokud by adept namísto odvození (vztahy (4) až (5)) uvedl přímo něco podobného vztahu (5) s vysvětlením, že změna kinetické energie se musí rovnat práci, kterou síla vykoná, asi by mohl také získat odpovídající počet 6 bodů.

Pokud vyhodnotíme poslední integrál, dostáváme

$$\frac{m}{2} v_1^2 = S \left[p_0 d^\kappa \frac{l^{1-\kappa} - d^{1-\kappa}}{1-\kappa} - b(l-d) \right] \quad (6)$$

z čehož plyne pro rychlost

$$v_1 = \sqrt{\frac{2S}{m} \left[p_0 d^\kappa \frac{l^{1-\kappa} - d^{1-\kappa}}{1-\kappa} - b(l-d) \right]} \quad (7)$$

A vzhledem k tomu, že $\kappa > 1$, je vhodná ještě úprava např.

(5 bodů)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2S}{m} \left[\left(1 - \left(\frac{d}{l} \right)^{\kappa-1} \right) \frac{p_0 d}{\kappa-1} - b(l-d) \right]} \quad (8)$$

Pro ideální plyn s dvouatomovými molekulami (5 stupňů volnosti) plyne z ekvipartičního teoremu pro molární tepelnou kapacitu: $C_v = \frac{5}{2}R$, z Mayerova vztahu pak $C_p = C_v + R = \frac{7}{2}R$, takže

(3 body)

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} \quad (9)$$

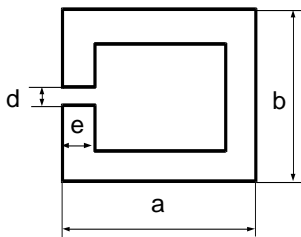
Po dosazení této hodnoty dostaneme konečně

(2 body)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2S}{m} \left[\left(1 - \left(\frac{d}{l} \right)^{0.4} \right) \frac{p_0 d}{0.4} - b(l-d) \right]} \quad (10)$$

Příklad 2 (25 bodů)

Železné jádro tvaru podle obrázku je opatřeno mezerou tloušťky d , průřez jádra je $e \cdot f$ (f je rozměr jádra ve směru kolmém k nákresně), Jádro je opatřeno cívkou s vinutím s N závitů, kterými protéká střídavý proud s amplitudou I , odpor vinutí je R . Určete



a) amplitudu indukce B střídavého magnetického pole v mezeře

b) amplitudu U střídavého napětí připojeného k vinutí cívky.

Předpokládejte, že materiál jádra lze v daném režimu popsat konstantní hodnotou relativní permeability μ_r , a zanedbejte rozptylová pole a ztráty vířivými proudy v jádře.

Příklad 2 (25 bodů) - řešení

Podle předpokladu prochází celým magnetickým obvodem stejný indukční tok

(3 body)
$$\Phi = B e f \quad (1)$$

Reluktance vzduchové mezery je dána vztahem

(3 body)
$$R_{mm} = d \frac{1}{\mu_0 e f} \quad (2)$$

a jelikož délka střední siločáry v železe v jádře je $2(a - f) + 2(b - f) - d$, je reluktance této části magnetického obvodu

(3 body)
$$R_{mj} = \frac{2(a + b - 2f) - d}{\mu_r \mu_0 e f} \quad (3)$$

Celková reluktance je tudíž $R_m = R_{mm} + R_{mj} = \frac{(\mu_r - 1)d + 2(a + b - 2f)}{\mu_r \mu_0 e f} \quad (4)$

a při známé magnetomotorické síle $E_m = NI$ můžeme podle Hopkinsonova zákona vypočítat indukční tok magnetickým obvodem

(4 body)
$$\Phi = \frac{NI}{R_m} = \frac{\mu_r \mu_0 e f N I}{(\mu_r - 1)d + 2(a + b - 2f)} \quad (5)$$

a tím také amplitudu magnetické indukce

(4 body)
$$B = \frac{\Phi}{e f} = \frac{\mu_r \mu_0 N I}{(\mu_r - 1)d + 2(a + b - 2f)} \quad (6)$$

Napětí U indukované na vinutí, rovné záporně vzaté časové derivaci indukčního toku,

(3 body)
$$U_{I_i} = -i \omega \Phi \quad (7)$$

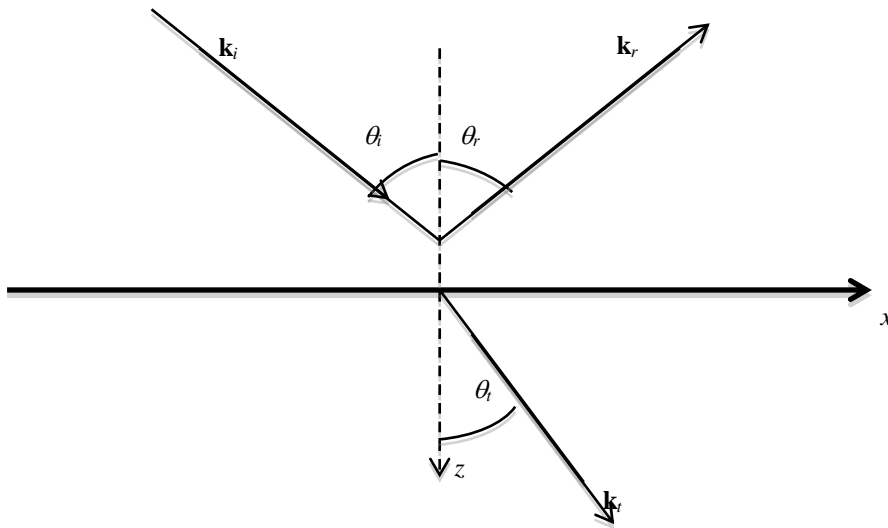
je o 90 stupňů fázově posunuto proti napětí vznikajícímu na odporu vinutí $U_R = RI$, takže se skládají jako dvě navzájem kolmé složky a amplituda celkového napětí na vinutí je

(5 bodů)
$$U = \sqrt{U_R^2 + U_I^2} = I \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega \mu_r \mu_0 e f N}{(\mu_r - 1)d + 2(a + b - 2f)} \right)^2} \quad (8)$$

Příklad 3 (25 bodů)

Na rovinné rozhraní dvou různých lineárních, homogenních, izotropních neabsorbujících prostředí o indexech lomu n_1 a n_2 dopadá rovinná monochromatická vlna s frekvencí ω a vlnovým vektorem \mathbf{k} polarizovaná v rovině dopadu (viz obrázek).

- Jaké okrajové podmínky na rozhraní těchto dvou prostředí musí splňovat vektory intenzity elektrického a magnetického pole?
- Jaký vztah platí mezi vektory intenzity elektrického a magnetického pole a jejich velikostmi?
- Odvoďte Fresnelův reflexní koeficient.
- Co je to Brewsterův úhel a jak je určen?
- Co je to mezní úhel a jak je určen?



Příklad 3 (25 bodů) - řešení

a) Tečné složky vektorů intenzity elektrického a magnetického pole musí být na rozhraní dvou izotropních neabsorbujících prostředí spojitě. Tj.

$$E_{ix} - E_{rx} = E_{tx},$$

$$H_{iy} + H_{ry} = H_{ty},$$

pro $z = 0$. Po úpravě

$$E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t,$$

$$H_i + H_r = H_t.$$

Indexy i, r a t označují dopadající, odraženou a prošlou vlnu.

(5 bodů)

b) Z Maxwellovy rovnice plyne pro rovinnou vlnu v neabsorbujícím prostředí

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$i\vec{k} \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \Rightarrow H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E$$

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = c\sqrt{\varepsilon\mu} \Rightarrow H = \frac{n}{c\mu} E$$

(5 bodů)

c) Protože rozdíly v permeabilitě běžných optických prostředí bývají dosti malé, lze s použitím výsledků z bodu b) a a) napsat

$$n_1 E_i + n_1 E_r = n_2 E_t,$$

$$E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t.$$

Vyjádřením E_t z předchozích dvou rovnic a uvážením zákona odrazu ($\theta_i = \theta_r$) dostáváme

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}.$$

S pomocí Snellova zákona a součtových vzorců lze tento vztah přepsat do tvaru

$$r = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)}.$$

(5 bodů)

d) Brewsterův úhel je úhel dopadu, při kterém vyhasíná odražená vlna polarizovaná v rovině dopadu, t. j. při němž $r = 0$. Tento případ nastává, pokud směr vlny odražené a lomené svírají pravý úhel.

$$\theta_{iB} + \theta_t = \frac{\pi}{2}. \text{ Ze Snellova zákona lomu plyne } \tan \theta_{iB} = \frac{n_2}{n_1}.$$

(5 bodů)

e) Při odrazu na „opticky řidším“ prostředí ($n_2 < n_1$) může nastat případ, kdy $\theta_t = 90^\circ$. Úhel dopadu, při kterém tento případ nastává, nazýváme mezním úhlem. Při větších úhlech pozorujeme úplný odraz, totální reflexi odrazu světla. Ze zákona lomu dostáváme pro mezní úhel

$$n_1 \sin \theta_{iM} = n_2 \sin \frac{\pi}{2},$$

$$\sin \theta_{iM} = \frac{n_2}{n_1}.$$

(5 bodů)

Příklad 4 (25 bodů)

Polymer krystalizuje v kubické mříži s mřížovou konstantou $a = 120 \text{ nm}$. Rozhodněte, zda bude možné pozorovat difrakční maxima od rovin typu $hkl \sim 001$ a 221 , pokud zdrojem bude elektromagnetické záření emitované vodíkovým atomem při přechodu elektronu z kvantové dráhy $n = 3$ na dráhu

a) $n = 2$

b) $n = 1$.

(Pomůcka: Planckova konstanta $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, rychlost světla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a Rydbergova konstanta $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$)

Příklad 4 (25 bodů) - řešení

vlnové délky určíme z Rydbergova vztahu

(4 body)
$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

(1 bod) pro přechod a) $3 \rightarrow 2$:
$$\frac{1}{\lambda} = 1,097 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = 1,097 \cdot 10^7 \cdot \frac{5}{36}$$

(1 bod) pro přechod b) $3 \rightarrow 1$:
$$\frac{1}{\lambda} = 1,097 \cdot 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{9} \right) = 1,097 \cdot 10^7 \cdot \frac{8}{9}$$

vzdálenost rovin typu hkl v kubické mříži

(4 body)
$$d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

(1 bod) typ 001 $d_{hkl} = a = 120 \text{ nm}$

(1 bod) typ 221 $d_{hkl} = \frac{120 \text{ nm}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{120 \text{ nm}}{\sqrt{9}} = 40 \text{ nm}$

Maximum bude pozorovatelné při úhlu θ , pokud bude splněna Braggova podmínka

(5 bodů)
$$n\lambda = 2d_{hkl} \sin \theta, \quad n \text{ je celé číslo}$$

Tedy pro roviny 001 vychází pro $\sin \theta$ v případě

(1 bod) a)
$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{2d_{hkl}} = n \frac{36}{5 \cdot 1,097 \cdot 10^7 \cdot 240 \cdot 10^{-9}} = n \frac{36}{1,097 \cdot 12} = n \cdot \frac{3}{1,097},$$

(1 bod) b)
$$\sin \theta = n \frac{9}{8 \cdot 1,097 \cdot 10^7 \cdot 240 \cdot 10^{-9}} = n \frac{3}{1,097 \cdot 6,4},$$

a pro roviny 221

(1 bod) a)
$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{2d_{hkl}} = n \frac{36}{5 \cdot 1,097 \cdot 10^7 \cdot 80 \cdot 10^{-9}} = n \frac{36}{1,097 \cdot 4} = \frac{9}{1,097} \cdot n,$$

(1 bod) b)
$$\sin \theta = n \frac{9}{8 \cdot 1,097 \cdot 10^7 \cdot 240 \cdot 10^{-9}} = n \frac{9}{1,097 \cdot 6,4},$$

Vidíme, že v případě č.2 – kde jde o přechod mezi hladinami $3 \rightarrow 2$ a o roviny typu 221 – dostáváme (dokonce pro $n=1$ i 2) pro sinus nenulovou velikost v absolutní hodnotě menší než 1, pro úhel tedy máme reálné řešení a difrakci lze pozorovat. V ostatních případech sinus vychází (s výjimkou nulové hodnoty) v absolutní hodnotě větší než 1, reálné řešení pro úhel (kromě nuly) neexistuje a difrakce pozorovatelná není.

(4 body)