Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

Studijní program Matematika, bakalářské studium

Studijní program Informatika, bakalářské studium

2014, varianta A

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 10 bodů. Tento plný počet bodů získáte za úlohy, u kterých dobře označíte[1] u každé z pěti nabízených odpovědí, zda je správná či chybná. Za každou úlohu, ve které označíte jednu či více odpovědí špatně, získáte 0 bodů, bez ohledu na počet dobře označených odpovědí. U úloh, ve kterých neoznačíte žádnou odpověď špatně, dostanete za každou dobře označenou odpověď 2 body (v případě pěti dobře označených odpovědí tedy plný počet 10 bodů).

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupečky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtání odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi	
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne
(a)	2	●	○	●	○	○	○	○	○
(b)	3	○	●	○	○	○	●	~~●~~	●
(c)	Méně než 12	●	○	●	○	○	○	~~●~~	○
(d)	Kladné číslo	●	○	○	○	●	○	●	~~●~~
(e)	1	○	●	●	○	○	●	~~●~~	●
Bodů:		**10**		**0**		**6**		**6**	

[1] Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. V posloupnosti čísel začínající 7, 10, 13, 16, 19, 22, … je každý člen o 3 vyšší, než člen předcházející. Určete, co platí pro součet prvních 100 členů této posloupnosti:

(a) Je menší než 10 000.
(b) Je menší než 20 000.
(c) Je větší než 20 000.
(d) Je sudý.
(e) Je dělitelný třemi.

2. Pro jistá tři čísla platí, že součty všech možných dvojic jsou 5, 10, 25. Rozhodněte, která tvrzení o těchto třech číslech jsou pravdivá.

(a) Čísla nelze jednoznačně určit.
(b) Nejmenší z nich je kladné.
(c) Všechna čísla jsou nenulová.
(d) Součet všech tří čísel je 15.
(e) Největší z nich je 15.

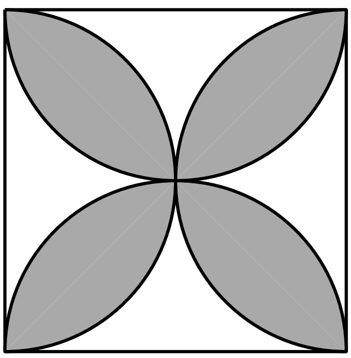
3. Šestnáct fotbalových družstev hrálo turnaj systémem každý s každým (každá dvojice sehrála jeden zápas). V celém turnaji padlo 420 gólů. Co platí o průměrném počtu gólů v jednom zápase?

(a) Je celočíselný.
(b) Je vyšší než 2.
(c) Je vyšší než 3.
(d) Je vyšší než 5.
(e) Ze zadaných údajů se nedá jednoznačně určit.

4. Nalezněte množinu M všech řešení rovnice $1 + \cos x = 2\sin^2 x$ v oboru reálných čísel.

(a) $\frac{199\pi}{3} \in M$
(b) $M \cap (-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}) = \emptyset$
(c) $M \cap (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \emptyset$
(d) Množina M je dvouprvková.
(e) Množina $M \cap \langle 0, \pi \rangle$ je dvouprvková.

5. Do čtverce jsou vepsány čtyři půlkružnice, jak znázorňuje obrázek. Plochu celého čtverce označíme S. Co platí o ploše šedě vybarvené části?



(a) Je rovna $S/3$.
(b) Je rovna $S/2$.
(c) Je větší než $S/2$.
(d) Je rovna $\frac{2}{3}S$.
(e) Je větší než $\frac{2}{3}S$.

6. Nalezněte množinu M všech řešení nerovnice $|x+2| - |2x-2| \leq -8$ v oboru reálných čísel.

(a) Všechna řešení jsou kladná.
(b) $(-\infty, -5) \subset M$
(c) $\langle -4, 4\rangle \cap M \neq \emptyset$
(d) $(5, +\infty) \subset M$
(e) $(-1, 10) \cap M \neq \emptyset$

7. V rovině jsou dány body $A = [0,3]$, $B = [6,0]$, $C = [4,2]$, $D = [2,0]$. Bod E je průsečík přímek AB, CD.

(a) Přímky AD, BC jsou rovnoběžné.
(b) Přímky AB, CD jsou navzájem kolmé.
(c) Bod E má celočíselné souřadnice.
(d) Vzdálenost bodů A, E je $\frac{5\sqrt{5}}{3}$.
(e) Vzdálenost bodů A, E je menší než 5.

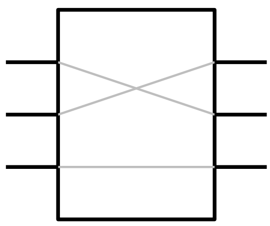
8. V algebrogramu představuje každé písmeno jednu číslici: 0, 1, …, 9. Různým písmenům odpovídají různé číslice. V následujícím algebrogramu platí, že ani C ani E není nula.

$$\begin{array}{ccccc} A & \times & B & = & CA \\ + & & - & & + \\ A & \times & C & = & D \\ \hline D & \times & A & = & EC \end{array}$$

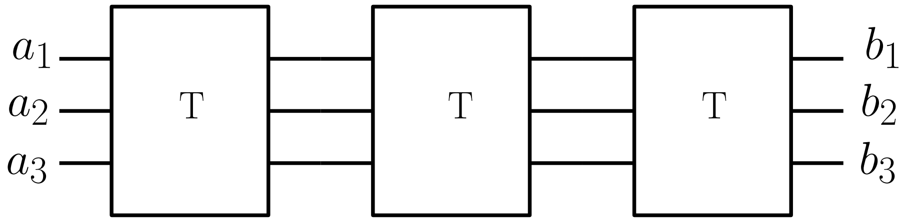
Rozhodněte, která z následujících tvrzení o písmenech z tohoto algebrogramu platí.

(a) Číslice odpovídající písmenu C musí být menší než 5.
(b) Číslice odpovídající písmenům C a E mohou být obě sudé.
(c) Číslice odpovídající písmenu B musí být rovna 6.
(d) Existuje více způsobů, jak lze přiřadit písmenům číslice, aby platily všechny rovnosti.
(e) Úloha nemá žádné řešení.

9. V krabičce na obrázku je každý ze tří vývodů (vstupů) vlevo propojen s jedním vývodem (výstupem) vpravo, každý vývod napravo je použit právě jednou. Možností jak za uvedených podmínek propojit vstupy a výstupy krabičky je celkem šest, jedna z nich je naznačena.



Nyní vezmeme tři krabičky stejného typu (označme ho T) a spojíme je za sebou: výstupy první napojíme na vstupy druhé, výstupy druhé na vstupy třetí.

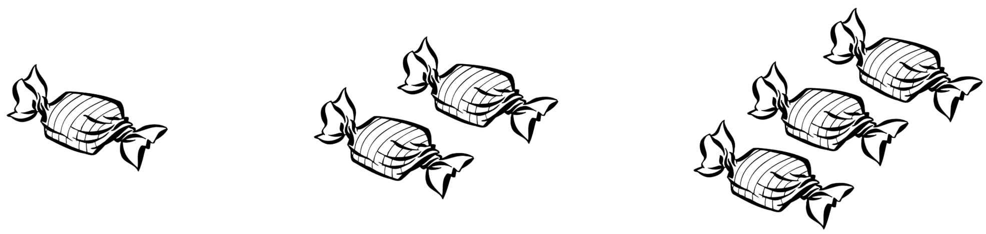


Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

(a) Pro každý typ T platí: vývody a_1 a b_1 jsou spojeny.
(b) Pro alespoň čtyři typy T platí: vývody a_2 a b_2 jsou spojeny.
(c) Pro každý typ T je spojeno a_1 s b_1, nebo a_2 s b_2, nebo a_3 s b_3.
(d) Pro každý typ T platí: pro všechna $i = 1, 2, 3$ je spojeno a_i s b_i.
(e) Pro alespoň tři typy T platí: pro všechna $i = 1, 2, 3$ je spojeno a_i s b_i.

10. Alenka a Bořík mají rádi bonbóny, budou o ně hrát hru. Na stole jsou bonbóny v několika hromádkách, hromádky jsou seřazeny v řadě zleva doprava. *Pozicí ve hře* budeme rozumět posloupnost velikostí hromádek.

Hráč na tahu si vezme jednu celou hromádku, ovšem může vzít jen tu úplně vpravo, nebo tu úplně vlevo. Začíná Alenka, pak se hráči střídají tak dlouho, dokud je na stole nějaká hromádka. Vyhrává ten, kdo získá více bonbónů; pokud jich oba získají stejně, tak vyhrává Alenka.



Na obrázku je pozice 1, 2, 3. Alenka může vzít hromádku s jedním nebo se třemi bonbóny, nemůže ale vzít tu se dvěma. V dalším tahu bude Bořík moci vzít už libovolnou ze dvou zbylých hromádek, Alenka pak vezme tu, která na ni zbude. Pozici nazveme *vyhranou pro Alenku*, pokud si Alenka může šikovnou hrou zajistit vítězství, bez ohledu na to, jak dobře nebo špatně hraje Bořík.

(a) Pozice 3, 6, 4, 2 je vyhraná pro Alenku.
(b) Pozice 3, 4, 3, 4, 3 je vyhraná pro Alenku.
(c) Každá pozice je vyhraná pro Alenku.
(d) Každá pozice se čtyřmi hromádkami je vyhraná pro Alenku.
(e) Každá pozice se třemi hromádkami je vyhraná pro Alenku.

Řešení úloh

1. Aritmetická posloupnost splňuje $a_1 = 7$, $d = 3$. Součet prvních 100 členů aritmetické posloupnosti je 15550. Správné odpovědi: b, d.

2. Sestavením lineárních rovnic pro neznámá čísla a, b, c (příp. jednodušších rovnic, kde přidáme neznámou s rovnou součtu $a + b + c$) získáme $a = -5$, $b = 10$, $c = 15$. Správné odpovědi: c, e.

3. Hledaný počet je roven $420/\binom{16}{2} = 3.5$. Správné odpovědi: b, c.

4. $M = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$ Správné odpovědi: a, c, e.

5. Je-li strana čtverce 1, je hledaná plocha P rozdíl čtyřnásobku plochy půlkruhu a plochy celého čtverce, tj. $P = 4\frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2})^2 - 1 = \pi/2 - 1 \doteq 0.57$. Správné odpovědi: c.

6. $M = (-\infty, -4\rangle \cup \langle 12, +\infty)$ Správné odpovědi: b, c.

7. $E = [10/3, 4/3]$. Správné odpovědi: d, e.

8. Existuje jednoznačné řešení $A = 4, B = 6, C = 2, D = 8, E = 3$. Správné odpovědi: a, c.

9. Správné odpovědi: b, c, e.

10. Správné odpovědi: a, b, d.