Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika, *Studijní obor:* MIU

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou $\{0, 1\}$, který přijímá všechna slova délky alespoň 4 znaky, která obsahují alespoň jeden znak 1. Například slova 0010, 1111, 110011 automat přijme, zatímco slova 11, 101, 00000 nepřijme. Přechodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít minimální počet stavů. Minimalitu počtu stavů vašeho automatu zdůvodněte.

Příklad 2 (25 bodů)

Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```
program A;
var N, X: integer;
begin
  read(N);
  X := 0;
  while N > 0 do
    begin
    X := X + 9 - N mod 10;
    N := N div 10
    end;
  write(X)
end.
```

```
main() /* A */
{
  int n, x;
  scanf( "%d", &n);
  x = 0;
  while (n > 0)
  {
    x = x + 9 - n % 10;
    n /= 10;
  }
  printf( "%d", x);
}
```

a) Jaký výsledek obdržíme při výpočtu se vstupní hodnotou `N=10593`?
b) Určete, pro kterou vstupní hodnotu `N` bude výsledkem číslo `X=24`. Nalezněte tři nejmenší různá taková `N` (pokud existují).
c) Určete všechny vstupní hodnoty `N`, pro která je výsledek výpočtu roven vstupní hodnotě, tzn. platí `X=N`.

Všechny své odpovědi zdůvodněte.

Příklad 3 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\ln^3 x - 2}{\ln^2 x + 1}.$$

(i) Určete definiční obor funkce f.
(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.
(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.
(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy – pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(v) Zjistěte, zda má daná funkce asymptoty, Pokud ano, vypočtěte je.
(vi) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 4 (25 bodů)

Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obor: MIU

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Pomocí stavů automatu odpočítáváme počet znaků přijatých ze vstupu a současně evidujeme, zda už jsme přečetli ze vstupu alespoň jeden znak 1. Stavy B, C, D znamenají slova délky po řadě 1, 2, 3 (a více) tvořená samými znaky 0, stavy E, F, G označují slova délky 1, 2, 3 obsahující alespoň jeden znak 1. Žádný z těchto stavů není koncový. Automat má jediný koncový stav H, do něhož přejde ze stavu D přečtením znaku 1 nebo ze stavu G přečtením jednoho libovolného znaku. Ve stavu H pak setrvá, dokud nepřečte celý vstup. Minimalitu počtu stavů ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	0	1	
$\longrightarrow$ A	B	E	počáteční stav
B	C	F	slovo 0
C	D	G	slovo 00
D	D	H	slovo délky alespoň 3, tvořené pouze znaky 0
E	F	F	slovo 1
F	G	G	slovo délky 2, obsahuje znak 1
G	H	H	slovo délky 3, obsahuje znak 1
$\longleftarrow$ H	H	H	slovo délky alespoň 4, obsahuje znak 1

Příklad 2 (25 bodů)

Výsledná hodnota X vznikne ciferným součtem vstupního čísla N, přičemž ale je každá cifra nahrazena svým doplňkem do 9. V cyklu se z N odzadu postupně oddělují jednotlivé cifry, nahrazují se svými doplňky do 9 a jsou přičítány k výsledné hodnotě X.

a) Doplňky cifer čísla $N = 10593$ jsou po řadě 8, 9, 4, 0, 6, jejich součet je roven výsledné hodnotě **27**.

b) Výsledek 24 nelze složit ze dvou cifer, musíme proto hledat mezi trojcifernými vstupními čísly. Získáme ho součtem tří jednociferných sčítanců $8 + 8 + 8$ nebo $9 + 8 + 7$ nebo $9 + 9 + 6$, což odpovídá trojicím cifer vstupního čísla 1, 1, 1 resp. 0, 1, 2 resp. 0, 0, 3. Z trojice cifer 1, 1, 1 lze sestavit jediné číslo 111, z trojice cifer 0, 1, 2 sestavíme čtyři různá trojciferná čísla 102, 120, 201, 210 a konečně trojice cifer 0, 0, 3 tvoří opět jediné trojciferné číslo 300. Z uvedených šesti možností vybereme jako výsledek úlohy tři nejmenší čísla, tedy **102**, **111** a **120**.

c) Podmínky zadání splňuje pouze vstupní hodnota **0**, pro níž se výpočet v cyklu nevykoná a výsledek je tedy zjevně roven nule. Pro záporná vstupní čísla je výsledek také nulový, tzn. odlišný od vstupní hodnoty. Nevyhovuje ani žádné kladné vstupní číslo. Žádné jednociferné číslo se nerovná svému doplňku do 9. Součet dvou cifer je roven nejvýše 18 a pro dvojciferná čísla z rozmezí od 10 do 18 snadno výčtem ověříme, že žádné z nich nevyhovuje (tzn. výsledek výpočtu se nerovná vstupní hodnotě). Vyšší dvojciferná čísla již zkoumat nemusíme. Pro $k > 2$ žádné k-ciferné číslo nemůže mít ciferný součet s k ciframi (trojciferné číslo má ciferný součet roven nejvýše 27, čtyřciferné nejvýše 36, atd.).

Příklad 3 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\ln^3 x - 2}{\ln^2 x + 1}$$

(i) Protože jmenovatel funkce f je kladný pro všechny hodnoty x, je definičním oborem funkce definiční obor logaritmu, tj. $D(f) = (0, \infty)$.

(ii) Z vět o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $D(f)$.

(iii) Stačí si uvědomit, že $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln^3 x-2}{\ln^2 x+1} = \lim_{y\to -\infty} \frac{y^3-2}{y^2+1} = -\infty$ a $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^3 x-2}{\ln^2 x+1} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^3-2}{y^2+1} = \infty$.

(iv) Snadno vypočteme

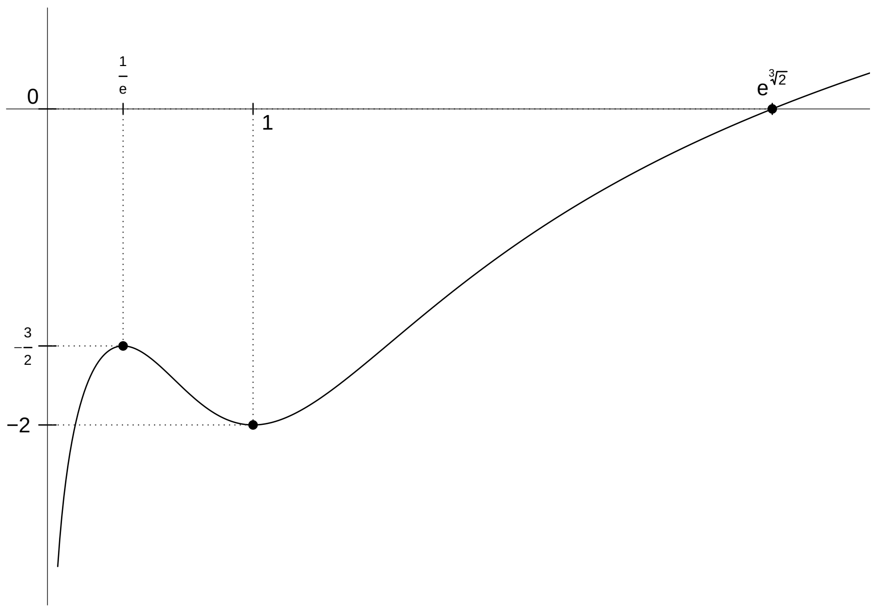
$$f'(x) = \frac{\ln x\ (\ln^3 x + 3\ln x + 4)}{x(\ln^2 x + 1)^2}$$

Výpočet nulových bodů derivace: Položíme $\ln x = u$ a vyřešíme rovnici $u \cdot (u^3 + 3u + 4) = 0$. Jejím reálným kořenům $u_0 = 0$ a $u_1 = -1$ odpovídají nulové body derivace $x_0 = 1$ a $x_1 = 1/e$. Ze znaménka derivace plyne, že f je rostoucí na $(0, 1/e)$, klesající na $(1/e, 1)$ a rostoucí na $(1, \infty)$. Má tedy lokální maximum v bodě $1/e$, lokální minimum v bodě 1. Protože není f na $D(f)$ omezená zdola ani shora, nenabývá na svém definičním oboru ani maxima ani minima. Pro upřesnění náčrtku grafu můžeme ještě spočítat: $f(1/e) = -3/2$, $f(1) = -2$, $f(e^{\sqrt[3]{2}}) = 0$.

(v) Funkce f má v bodě ∞ asymptotu, právě když existují vlastní limity $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$. Asymptotou pak nazveme afinní funkci $ax + b$.

Provedeme-li výše uvedené výpočty, snadno zjistíme, že asymptota v bodě ∞ neexistuje.

(vi) Náčrtek grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:



Příklad 4 (25 bodů)

Determinanty matice typu $n \times n$ kde $n \geq 4$ počítáme pomocí rozvoje podle libovolného řádku (sloupce). Je vhodné vybrat takový řádek či sloupec, který obsahuje co nejvíce nul.

Rozviňme determinant podle prvního sloupce:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$+ 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

K výpočtu každého determinantu 3×3 můžeme nyní použít Sarrusovo pravidlo. Dostaneme $\det A = 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 16 + 1 \cdot 4 = 48$.