Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE, MDU

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtěte
$$\int_M (4y^3 - xy + 4x^3)\, dx\, dy,$$
kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq x,\ y \geq x^2\}$.

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}.$$

(i) Určete definiční obor funkce f.
(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.
(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.
(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy – pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(v) Zjistěte, zda má daná funkce asymptoty, Pokud ano, vypočtěte je.
(vi) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 3 (25 bodů)

Nalezněte maximum a minimum funkce tří proměnných f na množině $M \subset \mathbb{R}^3$. Pokud neexistuje $\max_M f$, určete $\sup_M f$. Pokud neexistuje $\min_M f$, určete $\inf_M$. Funkce f a množina M jsou dány takto:
$$f(x,y,z) = x^2y^2 + y^2z^2, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x+y+z = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

Příklad 4 (25 bodů)

Určete hodnost $h(A)$ matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 9 & 4 & a \\ 1 & 15 & b & 24 \end{pmatrix}$$
v závislosti na reálných parametrech a, b.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE, MDU

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Nejprve určíme, že $M = \{[x,y];\ x \in \langle 0,1\rangle,\ y \in \langle x^2, x\rangle\}$. Je snadno vidět, že integrál existuje. K výpočtu užijeme Fubiniovy věty.

$$\int_M (4y^3 - xy + 4x^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x (4y^3 - xy + 4x^3)\,dy\right] dx.$$

Vypočteme nejprve vnitřní integrál

$$\int_{x^2}^x (4y^3 - xy + 4x^3)\,dy = -x^8 - \frac{7}{2}x^5 + 5x^4 - \frac{1}{2}x^3.$$

Výpočet integrálu této funkce od 0 do 1 vede snadno k výsledku. Je tedy

$$\int_M (4y^3 - xy + 4x^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(-x^8 - \frac{7}{2}x^5 + 5x^4 - \frac{1}{2}x^3\right) dx = \frac{13}{72}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}$$

(i) Definičním oborem funkce je množina těch x, pro něž je výraz $x^2 - \frac{1}{x}$ větší nebo roven nule. Po jednoduchém výpočtu nám vyjde, že

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup \langle 1, \infty).$$

(ii) Z věty o spojitosti součtu dvou spojitých funkcí a ze spojitosti funkce $\sqrt{y}$ plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $D(f)$.

(iii) Máme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ a $f(1) = 0$.

(iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{-1/2}\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)$$

na $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

Výpočet znaménka derivace dává:

- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(-\infty, -1/\sqrt[3]{2})$;
- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(-1/\sqrt[3]{2}, 0)$;
- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(1, \infty)$.

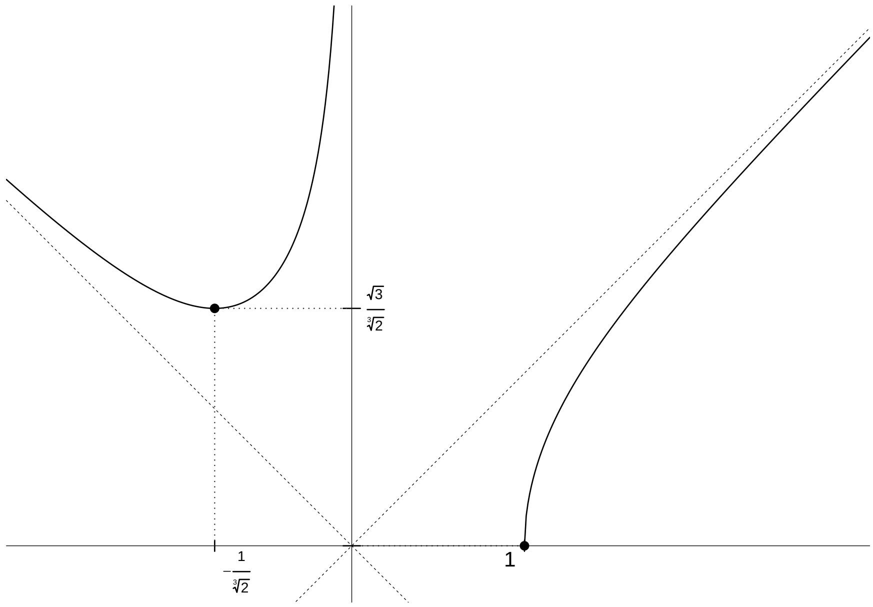
Protože f je v bodě 1 spojitá zprava a protože $\lim_{x\to 1+} f'(x) = \infty$, je $f'(1+) = \infty$: této informace můžeme využít k upřesnění náčrtku grafu.

Funkce f má v bodě $-1/\sqrt[3]{2}$ ostré lokální minimum rovné $\sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$. Funkce f není na $D(f)$ omezená shora, nenabývá tedy na $D(f)$ maxima. Minima nabývá v bodě 1, a je $f(1) = 0$.

(v) Funkce f má v bodě ∞ asymptotu, právě když existují vlastní limity $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$. Asymptotou pak nazveme afinní funkci $ax + b$. Analogické tvrzení platí v bodě $-\infty$.

Provedeme-li výše uvedené výpočty, snadno zjistíme, že asymptota v bodě $-\infty$ existuje a má tvar $v(x) = -x$. Asymptota v bodě ∞ rovněž existuje a je rovna $w(x) = x$.

(vi) Náčrtek grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:



Příklad 3 (25 bodů)

Protože funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^3$ (je dokonce třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$) , můžeme využít toho, že $\sup_M f = \max_{\bar{M}} f$ a $\inf_M f = \min_{\bar{M}} f$. Pokud funkce f v některém z bodů M dosahuje hodnoty $\sup_M f$, má zde funkce f maximum, přičemž uvedený bod je bodem maxima.

Budeme tedy zkoumat funkci f na množině $\bar{M}$. Ta je uzavřená a omezená v $\mathbb{R}^3$ a funkce f je na ní spojitá. Nabývá tedy f na $\bar{M}$ svého maxima a minima. Podezřelými jsou jednak body v M nalezené metodou Lagrangeových multiplikátorů, dále pak body, které leží v $\bar{M}$ a pro něž je alespoň jedna ze souřadnic nulová. Zkoumejme nejprve funkci na množinách M_i, $i = 1, 2, 3$, kde

$$M_1 = \{[0, y, 1-y];\ y \in \langle 0,\, 1\rangle\}, \quad M_2 = \{[1-y, y, 0];\ y \in \langle 0,\, 1\rangle\}$$
$$\text{a } M_3 = \{[x, 0, 1-x];\ x \in \langle 0,\, 1\rangle\}.$$

Na M_3 je $f \equiv 0$. Protože funkce f je na $\bar{M}$ nezáporná, jsou všechny body této úsečky body minima f na $\bar{M}$. Na množinách M_1 a M_2 je funkce f rovna $y^2(1-y)^2$. Tato funkce jedné proměnné má na intervalu $\langle 0,\, 1\rangle$ „podezřelé“ body 0, 1/2 a 1, z nichž pouze bod 1/2 je relevantní. Na množinách M_1 a M_2 tak máme dva podezřelé body $[0, 1/2, 1/2]$ a $[1/2, 1/2, 0]$. V nich nabývá f hodnoty 1/16.

Zkoumejme nyní podezřelé body v M metodou Lagrangeových multiplikátorů. Předně je $\nabla(x+y+z-1) = [1,1,1]$, tento bod neleží v M. Lagrangeova funkce má tvar $L(x,y,z,\lambda) = x^2y^2+y^2z^2+\lambda(x+y+z-1)$. Pro nalezení multiplikátoru a souřadnic podezřelého bodu dostáváme soustavu rovnic

$$2xy^2 + \lambda = 0, \quad 2y(x^2+z^2) + \lambda = 0, \quad 2zy^2 + \lambda = 0, \quad x+y+z = 1.$$

Jejich vyřešením (nesmíme přitom zapomenout, že v M jsou všechny souřadnice kladné) dostaneme další podezřelý bod, a sice $[1/4, 1/2, 1/4]$. V něm je funkční hodnota rovna $1/32$. Můžeme tedy shrnout: f nabývá v $\bar{M}$ svého maxima $1/16$ v bodech $[0, 1/2, 1/2]$ a $[1/2, 1/2, 0]$ a svého minima 0 v bodech $[x, 0, 1-x]$, $x \in \langle 0,\, 1\rangle$. Protože žádný z těchto bodů neleží v M, nenabývá f na M svého maxima ani svého minima. Jest $\sup_M f = 1/16$, $\inf_M f = 0$.

Příklad 4 (25 bodů)

Použijeme vhodnou transformaci a dostaneme postupně matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & -6 & a+2 \\ 0 & 15 & b-5 & 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a-13 \\ 0 & 0 & b+5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & b+5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-13 \end{pmatrix}.$$

Nyní je zřejmé, že $h(A) = 2$ v případě, že $a = 13$ a $b = -5$. Dále, je-li $a = 13$ a $b \neq -5$ nebo $a \neq 13$ a $b = -5$, je hodnost matice $h(A) = 3$. Jestliže $a \neq 13$ a $b \neq -5$, je $h(A) = 4$.