

# PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2012/13

*Studijní program:* Matematika

*Studijní obory:* MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE, MDU

## Varianta A

### Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtěte

$$\int_M (4y^3 - xy + 4x^3) dx dy,$$

kde  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq x, y \geq x^2\}$ .

### Příklad 2 (25 bodů)

Funkce  $f$  je dána předpisem

$$f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}.$$

- (i) Určete definiční obor funkce  $f$ .
- (ii) Zkoumejte spojitost funkce  $f$ .
- (iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce  $f$ .
- (iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce  $f$  má lokální extrémy – pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
- (v) Zjistěte, zda má daná funkce asymptoty, Pokud ano, vypočtěte je.
- (vi) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce  $f$ .

### Příklad 3 (25 bodů)

Nalezněte maximum a minimum funkce tří proměnných  $f$  na množině  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Pokud neexistuje  $\max_M f$ , určete  $\sup_M f$ . Pokud neexistuje  $\min_M f$ , určete  $\inf_M f$ . Funkce  $f$  a množina  $M$  jsou dány takto:

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 + y^2 z^2, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

### Příklad 4 (25 bodů)

Určete hodnost  $h(A)$  matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 9 & 4 & a \\ 1 & 15 & b & 24 \end{pmatrix}$$

v závislosti na reálných parametrech  $a, b$ .

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE, MDU

### Varianta A — řešení

#### Příklad 1 (25 bodů)

Nejprve určíme, že  $M = \{[x, y]; x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle x^2, x \rangle\}$ . Je snadno vidět, že integrál existuje. K výpočtu užijeme Fubiniovy věty.

$$\int_M (4y^3 - xy + 4x^3) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^x (4y^3 - xy + 4x^3) dy \right] dx.$$

Vypočteme nejprve vnitřní integrál

$$\int_{x^2}^x (4y^3 - xy + 4x^3) dy = -x^8 - \frac{7}{2}x^5 + 5x^4 - \frac{1}{2}x^3.$$

Výpočet integrálu této funkce od 0 do 1 vede snadno k výsledku. Je tedy

$$\int_M (4y^3 - xy + 4x^3) dx dy = \int_0^1 \left( -x^8 - \frac{7}{2}x^5 + 5x^4 - \frac{1}{2}x^3 \right) dx = \frac{13}{72}.$$

#### Příklad 2 (25 bodů)

Funkce  $f$  je dána předpisem

$$f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}$$

- (i) Definičním oborem funkce je množina těch  $x$ , pro něž je výraz  $x^2 - \frac{1}{x}$  větší nebo roven nule. Po jednoduchém výpočtu nám vyjde, že

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

- (ii) Z věty o spojitosti součtu dvou spojitých funkcí a ze spojitosti funkce  $\sqrt{y}$  plyne spojitost funkce  $f$  v každém bodě definičního oboru  $D(f)$ .

- (iii) Máme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  a  $f(1) = 0$ .

- (iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{1}{x} \right)^{-1/2} \left( 2x + \frac{1}{x^2} \right)$$

na  $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ .

Výpočet znaménka derivace dává:

- $f'(x) < 0$ , a tedy  $f$  je klesající, na intervalu  $(-\infty, -1/\sqrt[3]{2})$ ;
- $f'(x) > 0$ , a tedy  $f$  je rostoucí, na intervalu  $(-1/\sqrt[3]{2}, 0)$ ;
- $f'(x) > 0$ , a tedy  $f$  je rostoucí, na intervalu  $(1, \infty)$ .

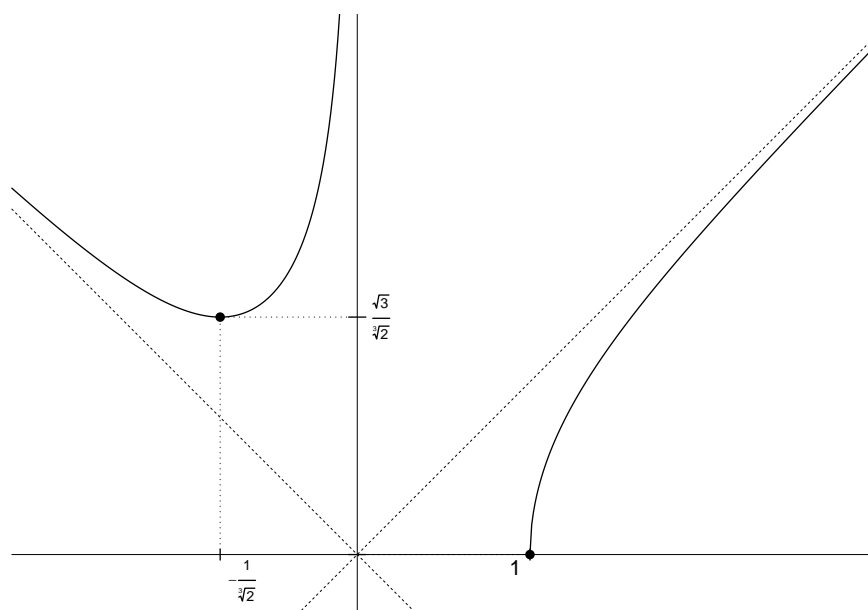
Protože  $f$  je v bodě 1 spojitá zprava a protože  $\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \infty$ , je  $f'(1+) = \infty$ : této informace můžeme využít k upřesnění náčrtku grafu.

Funkce  $f$  má v bodě  $-1/\sqrt[3]{2}$  ostré lokální minimum rovné  $\sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$ . Funkce  $f$  není na  $D(f)$  omezená shora, nenabývá tedy na  $D(f)$  maxima. Minima nabývá v bodě 1, a je  $f(1) = 0$ .

- (v) Funkce  $f$  má v bodě  $\infty$  asymptotu, právě když existují vlastní limity  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$  a  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ . Asymptotou pak nazveme afinní funkci  $ax + b$ . Analogické tvrzení platí v bodě  $-\infty$ .

Provedeme-li výše uvedené výpočty, snadno zjistíme, že asymptota v bodě  $-\infty$  existuje a má tvar  $v(x) = -x$ . Asymptota v bodě  $\infty$  rovněž existuje a je rovna  $w(x) = x$ .

- (vi) Náčrtek grafu funkce  $f$  na základě uvedených výpočtů:



### Příklad 3 (25 bodů)

Protože funkce  $f$  je spojitá na celém  $\mathbb{R}^3$  (je dokonce třídy  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ), můžeme využít toho, že  $\sup_M f = \max_{\bar{M}} f$  a  $\inf_M f = \min_{\bar{M}} f$ . Pokud funkce  $f$  v některém z bodů  $M$  dosahuje hodnoty  $\sup_M f$ , má zde funkce  $f$  maximum, přičemž uvedený bod je bodem maxima.

Budeme tedy zkoumat funkci  $f$  na množině  $\bar{M}$ . Ta je uzavřená a omezená v  $\mathbb{R}^3$  a funkce  $f$  je na ní spojitá. Nabývá tedy  $f$  na  $\bar{M}$  svého maxima a minima. Podezřelými jsou jednak body v  $M$  nalezené metodou Lagrangeových multiplikátorů, dále pak body, které leží v  $\bar{M}$  a pro něž je alespoň jedna ze souřadnic nulová. Zkoumejme nejprve funkci na množinách  $M_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , kde

$$M_1 = \{[0, y, 1 - y]; y \in \langle 0, 1 \rangle\}, \quad M_2 = \{[1 - y, y, 0]; y \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

$$\text{a } M_3 = \{[x, 0, 1 - x]; x \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

Na  $M_3$  je  $f \equiv 0$ . Protože funkce  $f$  je na  $\bar{M}$  nezáporná, jsou všechny body této úsečky body minima  $f$  na  $\bar{M}$ . Na množinách  $M_1$  a  $M_2$  je funkce  $f$  rovna  $y^2(1 - y)^2$ . Tato funkce jedné proměnné má na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  „podezřelé“ body 0,  $1/2$  a 1, z nichž pouze bod  $1/2$  je relevantní. Na množinách  $M_1$  a  $M_2$  tak máme dva podezřelé body  $[0, 1/2, 1/2]$  a  $[1/2, 1/2, 0]$ . V nich nabývá  $f$  hodnoty  $1/16$ .

Zkoumejme nyní podezřelé body v  $M$  metodou Lagrangeových multiplikátorů. Předně je  $\nabla(x + y + z - 1) = [1, 1, 1]$ , tento bod neleží v  $M$ . Lagrangeova funkce má tvar  $L(x, y, z, \lambda) = x^2y^2 + y^2z^2 + \lambda(x + y + z - 1)$ . Pro nalezení multiplikátoru a souřadnic podezřelého bodu dostáváme soustavu rovnic

$$2xy^2 + \lambda = 0, \quad 2y(x^2 + z^2) + \lambda = 0, \quad 2zy^2 + \lambda = 0, \quad x + y + z = 1.$$

Jejich vyřešením (nesmíme přitom zapomenout, že v  $M$  jsou všechny souřadnice kladné) dostaneme další podezřelý bod, a sice  $[1/4, 1/2, 1/4]$ . V něm je funkční hodnota rovna  $1/32$ . Můžeme tedy shrnout:  $f$  nabývá v  $\bar{M}$  svého maxima  $1/16$  v bodech  $[0, 1/2, 1/2]$  a  $[1/2, 1/2, 0]$  a svého minima  $0$  v bodech  $[x, 0, 1 - x]$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ . Protože žádný z těchto bodů neleží v  $M$ , nenabývá  $f$  na  $M$  svého maxima ani svého minima. Jest  $\sup_M f = 1/16$ ,  $\inf_M f = 0$ .

#### Příklad 4 (25 bodů)

Použijeme vhodnou transformaci a dostaneme postupně matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & -6 & a+2 \\ 0 & 15 & b-5 & 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a-13 \\ 0 & 0 & b+5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & b+5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-13 \end{pmatrix}.$$

Nyní je zřejmé, že  $h(A) = 2$  v případě, že  $a = 13$  a  $b = -5$ . Dále, je-li  $a = 13$  a  $b \neq -5$  nebo  $a \neq 13$  a  $b = -5$ , je hodnota matice  $h(A) = 3$ . Jestliže  $a \neq 13$  a  $b \neq -5$ , je  $h(A) = 4$ .