Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Načrtněte množinu M omezenou křivkami

$$y^2 = 2x + 1, \qquad y^2 = -4x + 4$$

a vypočtěte její plošný obsah.

Příklad 2 (25 bodů)

Rozhodněte (a řádně zdůvodněte), zda funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ nabývá na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$ své nejmenší a největší hodnoty. Pokud ano, vypočtěte je.

Příklad 3 (25 bodů)

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta^{-1} x \exp\{-x^2/(2\theta)\} & x > 0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \text{kde } \theta > 0 \text{ je neznámý parametr.}$$

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ.
(ii) Spočítejte hustotu X_1^2, určete přesné rozdělení $2n\hat{\theta}_n$ a zjistěte $\mathsf{E}\,\hat{\theta}_n$ a $\mathsf{var}\,\hat{\theta}_n$.
(iii) Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$ pro $n \to \infty$.

Příklad 4 (25 bodů)

Uvažujte aktiva 0, 1, 2. Aktivum 0 je bezrizikové s výnosem $r_0 = 6$, výnosy aktiv 1, 2 jsou náhodné veličiny se středními hodnotami $r_1 = 10$ a $r_2 = 8$ (vše v procentech), s rozptyly $\sigma_1^2 = 4$ a $\sigma_2^2 = 2$. Kovariance mezi výnosy je $\sigma_{12} = 1$. Předpokládejme, že investor investuje bohatství ve výši $W = 1$.

(i) Najděte portfolio P skládající se pouze z rizikových aktiv (tj. aktiv 1, 2) a poskytující očekávaný výnos $r_P = 9\%$.
(ii) Najděte portfolio P skládající se ze všech tří aktiv minimalizující riziko a poskytující očekávaný výnos $r_P = 9\%$. (Rizikem se zde rozumí směrodatná odchylka výnosu portfolia.)

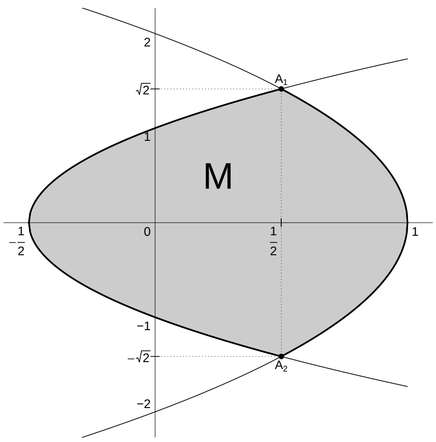
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Výpočet plochy můžeme provést pomocí Fubiniovy věty. Integrál z $f(x,y)=1$ přes danou množinu (= plocha množiny) existuje.



1. způsob

Vypočteme x-ové souřadnice bodů A_1 a A_2, v nichž se křivky omezující množinu M protnou. Dostaneme $x_1=x_2=1/2$. Průmět M_x množiny M do osy x je roven $(-1/2,1)$. Užitím těchto skutečností dostáváme

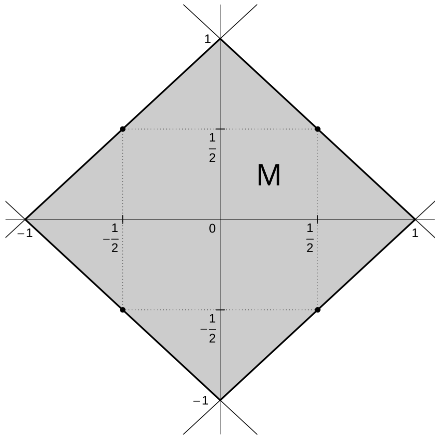
$$\int_M 1\,dx\,dy = \int_{-1/2}^{1/2}\left(\int_{-\sqrt{2x+1}}^{\sqrt{2x+1}} dy\right)dx + \int_{1/2}^{1}\left(\int_{-2\sqrt{1-x}}^{2\sqrt{1-x}} dy\right)dx = 2\sqrt{2}.$$

2. způsob

Vypočteme y-ové souřadnice bodů A_1 a A_2, v nichž se křivky omezující množinu M protnou. Dostaneme $y_{1,2}=\pm\sqrt{2}$. Je tedy průmět M_y množiny M do osy y roven $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Užitím těchto skutečností dostáváme

$$\int_M 1\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{-\frac{y^2-1}{2}}^{\frac{-y^2+4}{4}} dx\right)dy = 2\sqrt{2}.$$

Příklad 2 (25 bodů)



Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}^2$, tedy i na množině M. Množina M je omezená a uzavřená v $\mathbb{R}^2$. Podle věty, která říká, že funkce spojitá na kompaktní množině nabývá na ní své největší a nejmenší hodnoty, má tedy funkce f na M maximum a minimum. Body, podezřelými z nabývání extrémů, jsou jednak kritické body funkce f, ležící v M^0, jednak body hranice množiny M.

Kritické body uvnitř M:

Z rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x = 0$$

dostáváme, že jediný kritický bod uvnitř M je bod $[0,0]$. Je $f(0,0) = 0$.

Vyšetření f na hranici M:

V „rohových“ bodech množiny M, tj. $[1,0]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ a $[0,-1]$, je funkční hodnota funkce f rovna 1.

Zbývá vyšetřit situaci na množinách $H_1 = \{[x,y];\ x \in (0,1),\ y = 1-x\}$, $H_2 = \{[x,y];\ x \in (0,1),\ y = x-1\}$, $H_3 = \{[x,y];\ x \in (-1,0),\ y = 1+x\}$ a $H_4 = \{[x,y];\ x \in (-1,0),\ y = -1-x\}$. Snadno zjistíme, že další podezřelé body jsou body $[1/2, 1/2]$ a $[-1/2,-1/2]$, resp. $[-1/2, 1/2]$ a $[1/2,-1/2]$. Funkční hodnoty v těchto bodech jsou rovny $1/4$ resp. $3/4$.

Z provedených výpočtů plyne, že funkce f nabývá svého minima na M v bodě $[0,0]$ a je $\min_M f = f(0,0) = 0$ a funkce f nabývá svého maxima na M v bodech $[1,0]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ a $[0,-1]$ a je $\max_M f = 1$.

Příklad 3 (25 bodů)

(i)

Věrohodnostní funkce:	$L(\theta) = \theta^{-n}\Big(\prod_{i=1}^n X_i\Big)\exp\Big\{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^n X_i^2\Big\}$
Logaritmická věrohodnost:	$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \log X_i - n\log\theta - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^n X_i^2$
Skórová statistika:	$U(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n X_i^2$
Skórová funkce:	$U_i(\theta) = -\frac{1}{\theta} + \frac{X_i^2}{2\theta^2}$
Věrohodnostní rovnice:	$U(\hat\theta_n) = 0$ a odtud ihned $\hat\theta_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2$

Jediným řešením věrohodnostní rovnice je $\hat\theta_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2$. Je to maximálně věrohodný odhad, neboť $\ell(\theta)$ je spojitá a není omezená zdola.

(ii)

Spočítáme hustotu náhodné veličiny $Y = X^2$, kde X má hustotu $f(x;\theta)$. Jelikož $\mathsf{P}[X < 0] = 0$, transformace je prostá. Inversní transformací je $x = \sqrt{y}$, jakobián je $\frac{1}{2\sqrt{y}}$. Náhodná veličina Y má hustotu $g(y;\theta) = (2\theta)^{-1}\exp\{y/(2\theta)\}$. Její rozdělení je tedy $\mathsf{Exp}(1/(2\theta))$, střední hodnota $\mathsf{E}\,Y = \mathsf{E}\,X_i^2 = 2\theta$, rozptyl $\mathsf{var}\,Y = \mathsf{var}\,X_i^2 = 4\theta^2$.

Protože X_i jsou nezávislé a $2n\hat\theta_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$, máme ihned

$$2n\hat\theta_n \sim \Gamma\Big(\frac{1}{2\theta}, n\Big), \qquad \mathsf{E}\,\hat\theta_n = \frac{1}{2n}\,n\,\mathsf{E}\,X_i^2 = \theta, \qquad \text{a} \quad \mathsf{var}\,\hat\theta_n = \frac{1}{4n^2}\,n\,\mathsf{var}\,X_i^2 = \frac{\theta^2}{n}.$$

(iii)

Jelikož $\hat\theta_n$ je maximálně věrohodný odhad a jsou splněny podmínky regularity, jeho asymptotické rozdělení je $\sqrt{n}(\hat\theta_n - \theta) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, 1/I(\theta))$, kde Fisherova míra informace je $I(\theta) = \mathsf{E} - \frac{\partial U_i(\theta)}{\partial\theta} = \mathsf{E}\,X_i^2/\theta^3 - 1/\theta^2 = 1/\theta^2$. Máme tedy

$$\sqrt{n}(\hat\theta_n - \theta) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, \theta^2).$$

Příklad 4 (25 bodů)

Portfolio je soubor finančních aktiv. Je reprezentováno podíly (alokací, diverzifikací), které investor investuje do jednotlivých aktiv. Označíme-li $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)^\mathsf{T}$ tyto podíly, pak při investovaném bohatství ve výši 1 musí platit $x_1 + \cdots + x_N = 1$.

(i) Označme váhy v porfoliu x_1 a x_2. Musí platit $x_1 + x_2 = 1$. Z toho vyplývá, že pro očekávaný výnos portfolia platí

$$r_P = 10x_1 + 8x_2 = 10x_1 + 8(1 - x_1) = 2x_1 + 8 = 9,$$

a tedy $x_1 = x_2 = 1/2$.

(ii) Označme váhy v porfoliu x_0, x_1 a x_2. Musí platit $x_0 + x_1 + x_2 = 1$. Očekávaný výnos portfolia je tedy

$$r_P = 6x_0 + 10x_1 + 8x_2 = 6 + 4x_1 + 2x_2.$$

Požadujeme očekávaný výnos portfolia $r_P = 9$, takže z poslední rovnice dostaneme

$$x_2 = \tfrac{1}{2}(3 - 4x_1).$$

Jsou-li výnosy rizikových aktiv R_1 a R_2, je rozptyl výnosu portfolia (po dosazení za x_2)

$$\mathrm{var}(x_1R_1 + x_2R_2) = x_1^2\,\mathrm{var}(R_1) + 2x_1x_2\,\mathrm{cov}(R_1, R_2) + x_2^2\,\mathrm{var}(R_2) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = \tfrac{9}{2} - 9x_1 + 8x_1^2.$$

To je konvexní funkce, minimum získáme tak, že položíme první derivaci rovnu nule. Derivací posledního výrazu je $16x_1 - 9$, takže $x_1 = 9/16$. Zpětnými substitucemi do předchozích rovnic dostaneme $x_2 = 3/8$, $x_0 = 1/16$.