Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2013

Studijní program Fyzika
obor Učitelství fyziky – matematiky pro střední školy

Studijní program Učitelství pro základní školy
- obor Učitelství fyziky – matematiky pro 2. stupeň základních škol

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)
Funkce f je dána předpisem

$$f(x)=\sqrt{x^2-\frac{1}{x}}$$

(i) Určete definiční obor funkce f .
(ii) Zkoumejte spojitost funkce f .
(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f .
(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy – pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(v) Zjistěte, zda má daná funkce asymptoty, Pokud ano, vypočtěte je.
(vi) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f .

Příklad 1 (25 bodů) - řešení
Funkce f je dána předpisem

$$f(x)=\sqrt{x^2-\frac{1}{x}}$$

(i) Definičním oborem funkce je množina těch x, pro něž je výraz $x^2-\dfrac{1}{x}$ .větší nebo roven nule.
Po jednoduchém výpočtu nám vyjde,že $D(f)=(-\infty,0)\cup<1,\infty)$
(ii) Z věty o spojitosti součtu dvou spojitých funkcí a ze spojitosti funkce $\sqrt{y}$ plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $D(f)$.
(iii) Máme $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ a $f(1)=0$.
(iv) Snadno vypočteme

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{-1/2}\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)$$

na $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$.
Výpočet znaménka derivace dává:

- $f'(x)<0$, a tedy f je klesající, na intervalu $\left(-\infty,-1/\sqrt[3]{2}\right)$;
- $f'(x)>0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $\left(-1/\sqrt[3]{2},\,0\right)$;
- $f'(x)>0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(1,\infty)$.

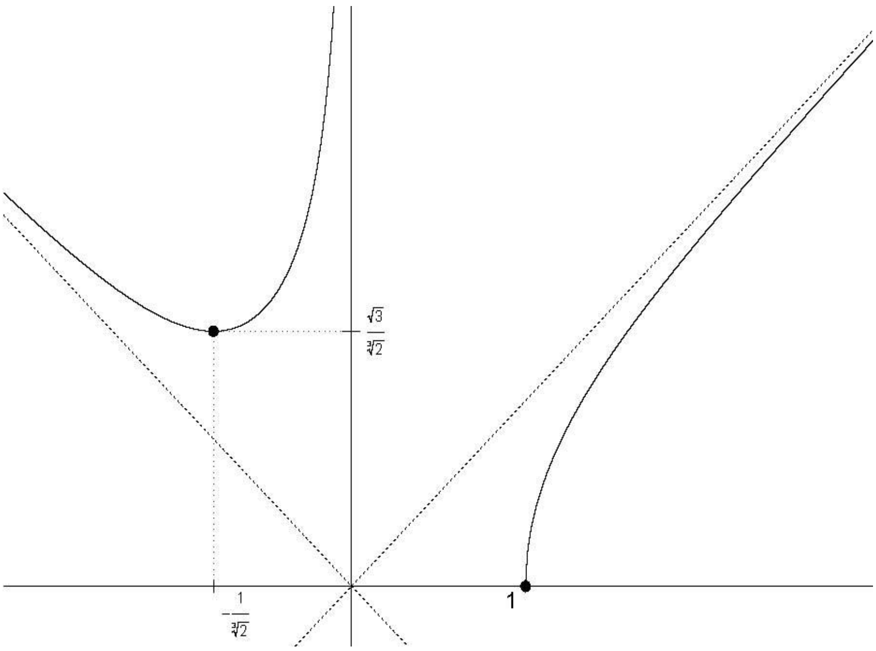
Protože f je v bodě 1 spojitá zprava a protože $\lim_{x\to 1+} f'(x)=\infty$, je $f'(1+)=\infty$: této informace můžeme využít k upřesnění náčrtku grafu.

Funkce f má v bodě $-1/\sqrt[3]{2}$ ostré lokální minimum rovné $\sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$. Funkce f není na $D(f)$ omezená shora, nenabývá tedy na $D(f)$ maxima. Minima nabývá v bodě 1, a je $f(1)=0$.

(v) Funkce f má v bodě ∞ asymptotu, právě když existují vlastní limity $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ a $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$. Asymptotou pak nazveme afinní funkci $ax+b$. Analogické tvrzení platí v bodě $-\infty$.

Provedeme-li výše uvedené výpočty, snadno zjistíme, že asymptota v bodě $-\infty$ existuje a má tvar $v(x)=-x$. Asymptota v bodě ∞ rovněž existuje a je rovna $w(x)=x$.

(vi) Náčrtek grafu funkce f na základě provedených výpočtů:



Příklad 2 (25 bodů)

Určete hodnost $h(A)$ matice

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & -1\\ 0 & 3 & -2 & 5\\ 2 & 9 & 4 & a\\ 1 & 15 & b & 24\end{pmatrix}$$

v závislosti na reálných parametrech a, b.

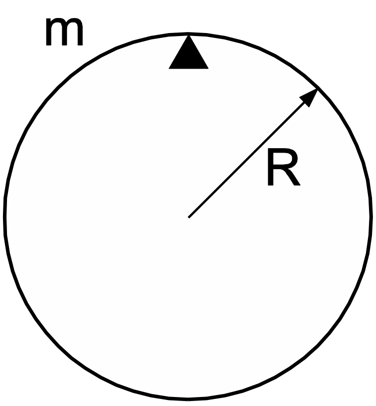
Příklad 2 (25 bodů) - řešení

Použijeme vhodnou transformaci a dostaneme postupně matice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & -1\\ 0 & 3 & -2 & 5\\ 0 & 9 & -6 & a+2\\ 0 & 15 & b-5 & 25\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & -1\\ 0 & 3 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & a-13\\ 0 & 0 & b+5 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & -1\\ 0 & 3 & -2 & 5\\ 0 & 0 & b+5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-13\end{pmatrix}.$$

Nyní je zřejmé, že $h(A)=2$ v případě, že $a=13$ a $b=-5$. Dále, je-li $a=13$ a $b\neq -5$ nebo $a\neq 13$ a $b=-5$, je hodnost matice $h(A)=3$. Jestliže $a\neq 13$ a $b\neq -5$, je $h(A)=4$.

Příklad 3 (25 bodů)



Obr.1.

Ocelový drát o hmotnosti m a zanedbatelné tloušťce je stočen do kruhu o poloměru R a zavěšen v jednom bodě tak, že může kmitat ve dvou navzájem kolmých směrech (Obr.1). Vypočtěte doby kmitu T_1, T_2 pro kývání kruhu
a) v rovině kruhu
b) ve svislé rovině kolmé k rovině kruhu.
Omezte se na malé rozkyvy

Příklad 3 (25 bodů) - řešení

Pohybová rovnice pro rotační pohyb tělesa (našeho kruhu) kolem pevné osy je

(3 body) $$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M \tag{1}$$

kde φ je úhel vychýlení tělesa z rovnovážné polohy, J moment setrvačnosti tělesa vůči ose otáčení a M celkový moment gravitačních sil, které na těleso působí, vůči této ose. Působení gravitačních sil lze nahradit silou mg působící v těžišti tělesa. V našem případě leží toto těžiště ve středu kruhu a jeho vzdálenost od osy otáčení je tudíž R . Velikost a smysl momentu lze proto vyjádřit vztahem

(3 body) $$M=-mgR\sin\varphi\approx -mgR\varphi \tag{2}$$

kde poslední výraz je přiblížení platné pro malé rozkyvy. V tomto přiblížení dostáváme rovnici pro harmonické kmity

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-mgR\varphi \tag{3}$$

kterou lze řešit standardními způsoby, třeba tak, že řešení hledáme ve tvaru exponenciální funkce

$\varphi=A\exp(\alpha t)$ a po jejím dosazení získáme charakteristickou rovnici $J\alpha^2=-mgR$, jejíž kořeny $\alpha_{1,2}=\pm i\omega=\pm i\sqrt{mgR/J}$ dávají přímo hodnotu úhlové frekvence ω a tím i dobu kmitu

(3 body) $$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgR}} \tag{4}$$

(Pokud adept tento nebo podobný vztah napíše rovnou, protože si ho pamatuje, mohl by za to dostat odpovídajících 9 bodů, i když, v zásadě, mechanicky naučené vzorce ještě nemusí znamenat porozumění.)

Pro výpočet momentu setrvačnosti J lze užít Steinerovy věty

(4 body) $$J=J_T+mR^2 \tag{5}$$

kde J_T je moment setrvačnosti vůči ose, která je s původní osou rovnoběžná a prochází těžištěm.

- Případ a): zde je „nová“ osa kolmá k rovině kruhu a prochází jeho středem, takže snadno vypočteme podle definice

(3 body)
$$J_T = \int_K R^2 dm = mR^2 \tag{6}$$

(integrace se provádí přes hmotnost celého kruhu K, jeho všechny body mají stejnou vzdálenost R od osy, takže integrand je konstantní a lze ho přesunout před znaménko integrálu). V tomto případě tedy vychází

(3 body)
$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{8R}{g}} \tag{7}$$

- Případ b): zde leží osa v rovině kruhu. V této rovině zavedeme pravoúhlou souřadnou soustavu x,y se středem ve středu kruhu. Moment setrvačnosti například vůči ose y bude dán vztahem

$$J_T = \int_K x^2 dm \tag{8}$$

Hodnotu tohoto integrálu lze stanovit snadno bez detailního výpočtu, povšimneme-li si, že

$$mR^2 = \int_K R^2 dm = \int_K \left(x^2 + y^2\right) dm = \int_K x^2 dm + \int_K y^2 dm, \tag{9}$$

hodnota obou integrálů napravo ale musí být s ohledem na symetrii stejná, takže každý z nich má hodnotu

(3 body)
$$J_T = \frac{1}{2} mR^2 \tag{10}$$

a pro dobu kmitu dostaneme

(3 body)
$$T_2 = \pi\sqrt{\frac{6R}{g}} \tag{11}$$

Příklad 4 (25 bodů)

Cívka o indukčnosti L je zapojena paralelně s rezistorem s odporem R, k této paralelní kombinaci je do serie připojen kondenzátor o kapacitě C. Celý obvod je připojen k síťovému napětí o frekvenci f s efektivní hodnotou U. Určete:

a) efektivní hodnotu I proudu, který bude obvodem protékat a

b) činný výkon P, který se v tomto obvodu ztrácí.

Prvky obvodu pokládejte za ideální.

Příklad 4 (25 bodů) - řešení

a) Označíme-li komplexní impedanci cívky

(2 body)
$$Z_L = i\omega L \tag{1}$$

(ω je úhlová frekvence $\omega = 2\pi f$) a impedanci rezistoru $Z_R = R$, je komplexní impedance paralelní kombinace dána výrazem

(2 body)
$$Z_p = \frac{Z_L Z_R}{Z_L + Z_R} \tag{2}$$

impedance kondenzátoru je $Z_C = \dfrac{1}{i\omega C}$ a celková impedance obvodu je tedy

(4 body)
$$Z = Z_p + Z_C = \frac{Z_L Z_R}{Z_L + Z_R} + Z_C = \frac{i\omega LR}{i\omega L + R} + \frac{1}{i\omega C}\ , \tag{3}$$

což lze upravit na

(4 body)
$$Z = \frac{R\left(1-\omega^2 LC\right) + i\omega L}{-\omega^2 LC + i\omega CR} \tag{4}$$

Reálný výraz $U\cdot\sqrt{2}$ můžeme pokládat za komplexní amplitudu (fázor) napětí na obvodu. Pokud obdobně komplexní amplitudu proudu obvodem dělenou $\sqrt{2}$ označíme $I\cdot$, platí

$$I = \frac{U}{Z} \tag{5}$$

Efektivní hodnota proudu je dána absolutní hodnotou (5)

(6 bodů)
$$|I| = \frac{|U|}{|Z|} = U\sqrt{\frac{\left(\omega^2 LC\right)^2 + (\omega CR)^2}{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + (\omega L)^2}} \tag{6}$$

b) Určení činného výkonu lze provést různými způsoby. Můžeme například násobit napětí složkou proudu, která je ve fázi s napětím, a protože vektor U je reálný, jde o reálnou složku komplexního vektoru $I\cdot$ (v obecnějším případě bychom museli vzít výraz $\mathrm{Re}\left(U^{+}\cdot I\right)$, kde U^{+} je vektor komplexně sdružený k U). V našem případě tedy máme

(7 bodů)
$$P = U\cdot\mathrm{Re}(I) = U^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = U^2\frac{(\omega CL)^2 R}{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + (\omega L)^2} \tag{7}$$

Jiná možnost je vypočítat z fázového posuvu proudu vůči napětí účiník a ten pak použít k výpočtu výkonu.