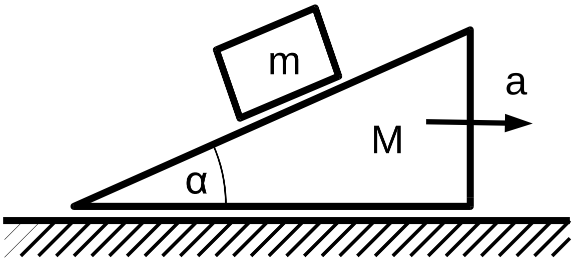
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2013

Studijní program Fyzika - všechny obory kromě Učitelství fyziky – matematiky pro střední školy

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtěte zrychlení a klínu o hmotnosti M, na němž spočívá kvádr o hmotnosti m (viz obrázek). Tření v obou styčných plochách pokládejte za nulové.



Příklad 1 (25 bodů) – řešení

Označme $\vec{a}^{(r)}$ vektor zrychlení kvádru vůči vztažné soustavě pevně spojené s klínem. Potom zrychlení kvádru vůči laboratorní soustavě získáme jako součet $\vec{a}+\vec{a}^{(r)}$ a pro jeho pohyb můžeme psát

(5 bodů) $$m\vec{g}+\vec{T}=m\left(\vec{a}+\vec{a}^{(r)}\right) \tag{1}$$

kde $\vec{g}$ je vektor tíhového zrychlení a $\vec{T}$ tlaková síla, kterou na kvádr působí klín. Protože je tření zanedbatelné, síla $\vec{T}$ má směr kolmý k povrchu klínu. Zavedeme-li kartézskou souřadnou soustavu tak, že osa x má směr pohybu klínu a osa z směřuje svisle vzhůru, lze vektor T psát ve složkách jako

(3 body) $$\vec{T}=\left(-T\sin\alpha, 0, T\cos\alpha\right). \tag{2}$$

Vektor $\vec{a}^{(r)}$ je rovnoběžný s horní plochou klínu a má proto složky

(3 body) $$\vec{a}^{(r)}=\left(-a^{(r)}\cos\alpha, 0, -a^{(r)}\sin\alpha\right) \tag{3}$$

Rovnici (1) lze proto ve složkách rozepsat

(3 body) $$-T\sin\alpha=m\left(a-a^{(r)}\cos\alpha\right) \tag{4}$$

(3 body) $$-mg+T\cos\alpha=-ma^{(r)}\sin\alpha \tag{5}$$

Ještě je třeba doplnit rovnici pro pohyb klínu ve směru osy x: – na klín působí reakce $-\vec{T}$ od kvádru a lze tedy psát

(3 body) $$T\sin\alpha=Ma \tag{6}$$

Hledaný vztah pro a získáme, vyloučíme-li z rovnic (4,5,6) veličiny T a $a^{(r)}$. Z (4,5) můžeme například vyloučit $a^{(r)}$:

$$-mg\cos\alpha-T=-ma\sin\alpha \tag{7}$$

což spolu s (6) dá výsledek

(5 bodů) $$a=\frac{mg\cos\alpha\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}=\frac{mg(\sin 2\alpha)}{2\left(M+m\sin^2\alpha\right)} \tag{8}$$

Existují ovšem i jiné varianty postupu řešení, lze užít vlastností těžiště a pod.

Příklad 2 (25 bodů)

V poloprostoru z > 0 teče z nekonečna po ose z konstantní proud I, v počátku vstupuje do roviny z = 0, kterou rovnoměrně všemi směry odtéká zpět do nekonečna.

a) S využitím symetrie úlohy nalezněte magnetické pole.

b)Ověřte splnění Maxwellových rovnic v rovině z = 0.

Příklad 2 (25 bodů) -řešení

Vzhledem k symetrii je vhodné pracovat v cylindrických souřadnicích (R,φ,z). K řešení problému použijeme Ampérův zákon

(5 bodů)
$$rot\vec{B} = \mu\,\vec{j} \tag{1}$$

Nejprve budeme řešit magnetické pole v poloprostoru $z > 0$. Ampérův zákon plošně zintegrujeme přes kruh K ležící v rovině kolmé k ose z a se středem na této ose. Na levé straně použijeme Stokesovu větu, čímž získáme

(5 bodů)
$$\int_{\partial K} \vec{B}^{+} d\vec{l} = -\mu\, I \tag{2}$$

Provedením integrace levé strany s ohledem na axiální symetrii získáme

$$B_{\phi}^{+} = -\frac{\mu\, I}{2\pi R} \tag{3}$$

Pokud bychom stejně postupovali ve spodním poloprostoru, dostaneme zjevně

(5 bodů)
$$B_{\phi}^{-} = 0 \tag{4}$$

Nyní musíme ověřit, že obě řešení lze v rovině z = 0 navázat konzistentně s proudem v rovině tekoucím. Rovnice $div\,\vec{B} = 0$ nám (po integrování přes kvádr, jehož dvě protilehlé stěny jsou rovnoběžné s rovinou z = 0 a jedna leží pod rovinou a druhá nad ní) určuje spojitost normálových složek. V našem případě jsou ovšem obě tyto složky nulové

(4 body)

Naopak integrací Ampérova zákona přes vhodné plošky protínající rovinu z = 0 zjistíme, že tečné složky magnetického pole spojité nejsou. Konkrétně vezměme plochu, jejíž hranici tvoří dva úseky kružnic délky l (s konstantními R, z) - jeden nad rovinou a druhý pod ní - spojené vertikálními úsečkami. Celkový proud protékající touto plochou je

$$I_l = -\frac{I\, l}{2\pi R} \tag{5}$$

Pokud orientujeme hranici plochy podle pravidla pravé ruky vzhledem k protékajícímu proudu, získáme

(6 bodů)
$$\left(B_{\phi}^{-} - B_{\phi}^{+}\right) I_l = \mu I_l = \frac{\mu\, I}{2\pi R} l \tag{6}$$

Výše nalezené pole tedy podmínkám navázání vyhovuje.

Příklad 3 (25 bodů)
Optická mřížka má tvar čtverce o straně a=1 cm, hustota vrypů h je 100 vrypů na 1 mm. Celá plocha mřížky je rovnoměrně osvětlena kolmo dopadajícím svazkem rovnoběžných paprsků o vlnové délce λ = 500 nm.
a) Pod jakými úhly vzniknou interferenční maxima 1. řádu?
b) Jaký nejvyšší řád k_{max} je teoreticky možné s mřížkou pozorovat?
c) Je tato mřížka schopna rozlišit sodíkový dublet ($\lambda_1 = 588.995$ nm, $\lambda_2 = 589.592$ nm)? Pokud ano, ve kterém řádu spektra?
d) Mřížku natočíme o úhel α = 30° (úhel mezi dopadajícím svazkem a normálou plochy mřížky). Odhadněte, pod jakým úhlem (měřeno od normály k ploše mřížky) nyní vzniknou interferenční maxima 1. řádu?

Příklad 3 (25 bodů) - řešení
Pro interferenční maximum k-tého řádu na rovinné mřížce s mřížkovou konstantou
(2 body) $$d = 1/h \tag{1}$$
platí vztah
(5 bodů) $$d(\sin\beta - \sin\alpha) = k\lambda\,, \tag{2}$$
kde α, β jsou úhly dopadajícího a difraktovaného svazku, měřené od kolmice k mřížce.
a) Z (2) plyne
$$\sin\beta = \sin\alpha + \frac{k\lambda}{d} = \sin\alpha + kh\lambda \tag{3}$$
a dosadíme-li sem zadané hodnoty h, λ,
$$\sin\beta = \sin\alpha + k \times 0.05\,, \tag{4}$$
takže pro $k = \pm 1, \alpha = 0$ vychází $\sin\beta = \pm 0.05$, tedy
(3 body) $$\beta = \pm 0.0502\,\text{rad} = 2.866° \tag{5}$$
b) Pro pozorování musí pro úhel β platit $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ a podle (4) nejvyšší hodnota k, která to splňuje, je $k_{max} = 19$, teoreticky je tudíž pozorovatelný nejvýše devatenáctý řád
(2 body)
c) Rozlišovací schopnost spektrálního přístroje pro vlnovou délku λ se definuje vztahem
(2 body) $$R = \lambda / \Delta\lambda\,, \tag{6}$$
kde $\Delta\lambda$ je rozdíl vlnových délek dvou blízkých spektrálních čar, které lze právě ještě rozlišit. Pro difrakční mřížku stejně jako pro některá jiná zařízení využívající interference mnoha svazků lze rozlišovací schopnost vypočítat dle vztahu
(4 body) $$R = n \times k\,, \tag{7}$$
kde k je řád spektra a n počet interferujících svazků. V našem případě je
$$n = ha = 1000\,,\ \text{tedy}$$
$$R = 1000 \times k\,.$$
Pro sodíkový dublet platí $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 1000$, takže v prvním řádu bude právě na hranici rozlišení, zatímco ve vyšších řádech, druhým počínaje, by již měl být dobře rozlišitelný.
(3 body)
d) Dosazením $\alpha = 30°$, t. j. $\sin\alpha = 0.5$, do (4) vyjde pro maxima prvního řádu
pro $k = 1$: $\sin\beta = 0.55$, t.j. $\beta = 0.5823\,\text{rad} = 33.37°$
pro $k = -1$: $\sin\beta = 0.45$, t.j. $\beta = 0.4667\,\text{rad} = 26.74°$

Příklad 4 (25 bodů)

Odhadněte, při jakém difrakčním úhlu by bylo pozorováno difrakční maximum od atomových rovin typu (222) bromidu draselného (KBr) pro

a) rtg. záření s vlnovou délkou λ = 1,5406 Å a

b) neutrony s energií 0.1 eV?

KBr krystalizuje v kubické plošně centrované mřížce a jeho mřížkový parametr *a* = 3,30 Å.(hmotnost neutronu $1.685\text{x}10^{-27}$kg, Planckova konstanta $6.626\text{x}10^{-34}$J.s)

Příklad 4 (25 bodů) - řešení

a) Nejprve určíme mezirovinnou vzdálenost pro daný typ rovin. Ta je pro kubickou látku dána vztahem

(4 body) $$d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} \text{ , tedy :} \qquad (1)$$

(2 body) $$d_{222} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \qquad (2)$$

(d_{hkl}) může student alternativně určit i jiným způsobem – např. geometrickou úvahou, pokud zřetelně popíše postup získání této hodnoty – a pokud tato hodnota bude správná, tj. stejná jako uvedená výše).

Hledaný difrakční úhel $2\theta_{hkl}$ .se určí z Braggovy rovnice

(4 body) $$n\lambda = 2d_{hkl}\sin\theta_{hkl} \qquad (3)$$

odtud

(3 body) $$2\theta_{hkl} = 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{2d_{hkl}}\right) = 2\arcsin\left(\frac{\lambda\sqrt{h^2+k^2+l^2}}{2a}\right) \qquad (4)$$

číselně

(2 body) $$2\theta_{hkl} = 2\theta_{hkl} = 2\arcsin(0.8086) = 53.9^{\circ} \qquad (5)$$

b) Pro neutrony (o hmotnosti m_n) lze použít klasický výraz pro energii $E = \frac{p^2}{2m_n}$, kde hybnost

(5 bodů) $$p = \frac{h}{2\pi}k = \frac{h}{\lambda} \qquad (6)$$

(k je vlnový vektor, λ vlnová délka, h Planckova konstanta). Pro vlnovou délku tedy dostáváme

(3 body) $$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_n E}} \qquad (7)$$

číselně $$\lambda = 0.9845\text{Å} \qquad (8)$$

a po dosazení do (4)

(2 body) $$2\theta_{hkl} = 2\arcsin(0.47474) = 28.34^{\circ} \qquad (9)$$