Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

Studijní program Matematika, bakalářské studium

Studijní program Informatika, bakalářské studium

2013, varianta A

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 10 bodů. Tento plný počet bodů získáte za úlohy, u kterých dobře označíte[1] u každé z pěti nabízených odpovědí, zda je správná či chybná. Za každou úlohu, ve které označíte jednu či více odpovědí špatně, získáte 0 bodů, bez ohledu na počet dobře označených odpovědí. U úloh, ve kterých neoznačíte žádnou odpověď špatně, dostanete za každou dobře označenou odpověď 2 body (v případě pěti dobře označených odpovědí tedy plný počet 10 bodů).

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupečky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtání odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi	
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne
(a)	2	●	○	●	○	○	○	○	○
(b)	3	○	●	○	○	○	●	~~●~~	●
(c)	Méně než 12	●	○	●	○	○	○	~~●~~	○
(d)	Kladné číslo	●	○	○	○	●	○	●	~~●~~
(e)	1	○	●	●	○	○	●	~~●~~	●
Bodů:		**10**		**0**		**6**		**6**	

[1] Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Nalezněte množinu M všech řešení nerovnice $\frac{x-2}{x-3} \leq 0$ v oboru reálných čísel.

a) Množina M je uzavřený interval.
b) $M = (-\infty, 2\rangle$
c) $M \cap (2, 4) \neq \emptyset$
d) $M \subset (0, \infty)$
e) $M \cap (-1, 1) \neq \emptyset$

2. Nalezněte množinu M všech řešení nerovnice $x^2 - 5 - |x + 1| > 0$ v oboru reálných čísel.

a) Všechna řešení jsou kladná.
b) $(4, \infty) \subset M$
c) Všechna řešení jsou menší než $\sqrt{17}$.
d) Číslo $\frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)$ je řešením nerovnice.
e) $M \cap (-1, 2) \neq \emptyset$

3. Určete vzdálenost d bodu $(2, 3)$ od přímky procházející body $(-3, 3)$ a $(-7, 0)$.

a) $d > \frac{5}{2}$
b) $d > 4$
c) $d < \frac{8}{3}$
d) $d < \frac{10}{3}$
e) $d \in \langle \frac{1}{2}, \sqrt{10} \rangle$

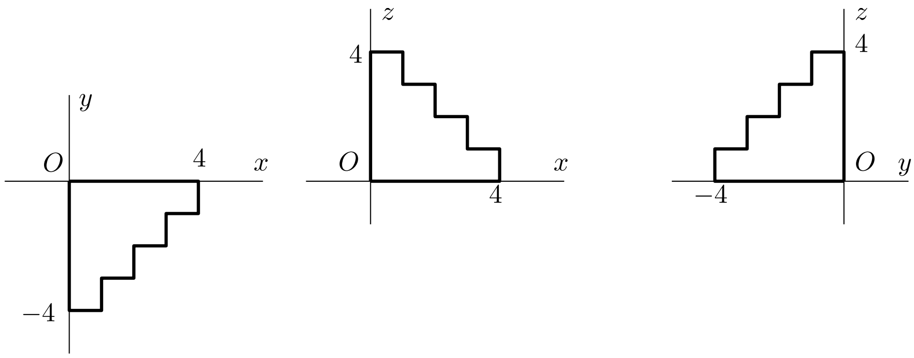
4. Čísla 1339, 1080 a 1741 mají několik společných vlastností: každé je kladné, celé, čtyřciferné, začíná číslicí 1 a obsahuje právě dvě stejné číslice. Počet všech různých čísel majících všechny uvedené vlastnosti označme P.

a) $P \in \langle 121, 358 \rangle$
b) $P \in \langle 221, 458 \rangle$
c) $P \in \langle 321, 499 \rangle$
d) $P \in \langle 430, 510 \rangle$
e) $P > 510$

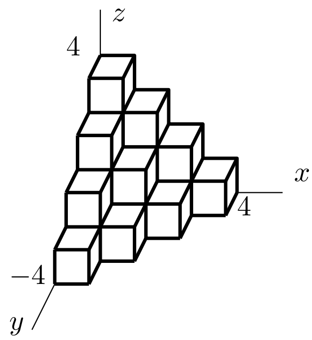
5. V reálném oboru vyřešte rovnici $3 \sin^2 x + \cos^2 x = 2\sqrt{2} \sin x$. Množinu všech řešení označme M.

a) Množina M má právě jeden prvek.
b) $\frac{401\pi}{4} \in M$
c) $M \cap (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) = \emptyset$
d) $M \cap (0, \frac{\pi}{3}) = \emptyset$
e) Množina M je prázdná.

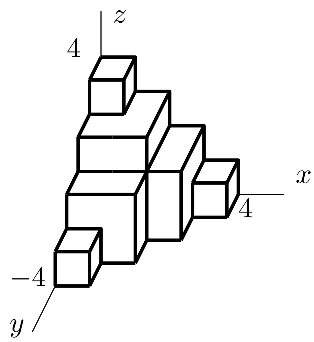
6. Těleso T má následující průměty do rovin rovnoběžných se souřadnicovými osami. Bod O značí počátek souřadnicového systému. Určete, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.



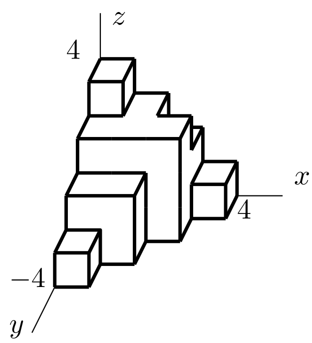
a) Těleso T musí vypadat jako těleso na tomto obrázku:



b) Těleso T může vypadat jako těleso na tomto obrázku:



c) Těleso T může vypadat jako těleso na tomto obrázku:



d) Objem tělesa může být 20.

e) Objem tělesa je nejvýše 23.

7. Pro reálná čísla a, b, c uvažme následující dva vztahy:

$$|a+b+c| = |a|+|b|+|c|, \qquad \text{(X)}$$
$$ab+ac+bc \geq 0. \qquad \text{(Y)}$$

a) Pokud je pro daná čísla a, b, c splněna podmínka (X), pak je pro ně nutně splněna i podmínka (Y).
b) Pokud je pro daná čísla a, b, c splněna podmínka (Y), pak je pro ně nutně splněna i podmínka (X).
c) Podmínka (X) je splněna pro všechna reálná čísla a, b, c.
d) Pro všechna reálná čísla a, b, c platí: je-li největší z čísel a, b, c záporné, pak je splněna podmínka (Y).
e) Existují reálná a, b, c taková, že podmínka (X) není splněna.

8. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic s reálným parametrem λ:

$$x + \lambda y = 1,$$
$$\lambda x + 2y = \lambda.$$

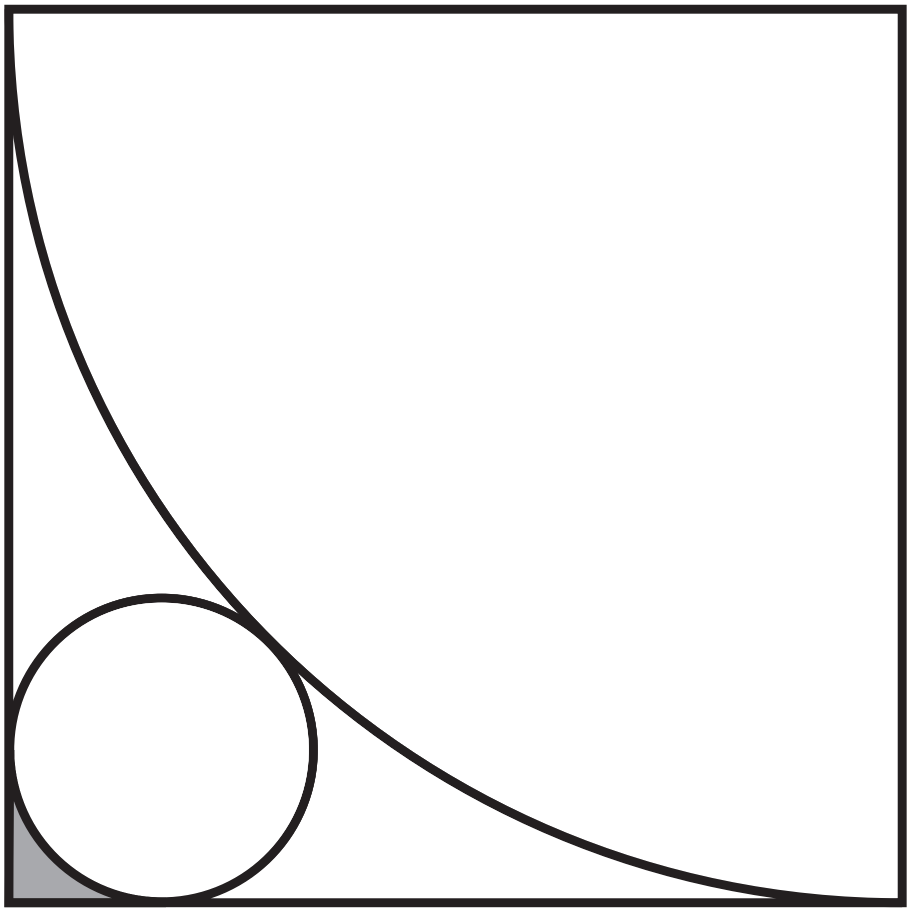
a) Soustava má právě jedno řešení (x, y) právě tehdy, když $|\lambda| \neq 1$.
b) Soustava má právě jedno řešení (x, y) pro libovolné $|\lambda| > \sqrt{2}$.
c) Pro každé řešení (x, y) platí $x = y$.
d) Pro $\lambda = -1$ nemá soustava řešení.
e) Pro $\lambda = 1$ existuje řešení (x, y) splňující $x \geq 0, y \leq 0$.

9. Na šachovnici 8×8 polí stojí figurka v levém horním rohu a potřebuje se dostat do pravého dolního rohu. V každém tahu se posune buď o jedno políčko vodorovně doprava, nebo o jedno políčko svisle dolů. Označme P počet všech takových cest figurky.

a) $P \in \langle 1600, 4024 \rangle$
b) $P \in \langle 2048, 6500 \rangle$
c) $P \in \langle 4000, 10256 \rangle$
d) P je liché.
e) P je dělitelné třemi.

10. Ve vrcholu čtverce o straně délky 1 má střed kružnice o poloměru 1. Další kružnice se dotýká hranice čtverce a uvedené kružnice. Spočtěte obsah S šedé části vymezené hranicí menšího kruhu a hranicí čtverce (viz obrázek).

a) $S < (3 - 2\sqrt{2})^2$
b) $S = (1 - \frac{\pi}{4})(3 - 2\sqrt{2})^2$
c) $S = (1 - \frac{\pi}{4})(4 - 2\sqrt{2})^2$
d) $S > 1 - \frac{\pi}{4}$
e) $S > 10^{-6}$



Výsledky (A)

1. $M = \langle 2, 3)$
Správné odpovědi: c, d.

2. $M = \left(-\infty, -\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})\right) \cup (3, \infty)$
Správné odpovědi: b.

3. $d = 3$
Správné odpovědi: a, d, e.

4. 432
Správné odpovědi: b, c, d.

5. $M = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
Správné odpovědi: b, c.

6. Správné odpovědi: b, d, e.

7. Správné odpovědi: a, d, e.

8. Pokud $\lambda \neq \pm\sqrt{2}$, pak je řešením $x = 1, y = 0$. Pokud $\lambda = \pm\sqrt{2}$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.
Správné odpovědi: b, e.

9. $\binom{14}{7} = 3432$
Správné odpovědi: a, b, e.

10. $S = (1 - \frac{\pi}{4})r^2$, kde $r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$.
Správné odpovědi: a, b, e.