

Studijní program Matematika, obor Učitelství matematiky-informatiky pro SŠ
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtete

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}.$$

- (i) Určete definiční obor funkce f .
- (ii) Zkoumejte spojitost funkce f .
- (iii) Vypočtete limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f .
- (iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy — pokud ano, vypočtete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
- (v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f .
- (vi) Vypočtete asymptoty.
- (vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f .

Příklad 3 (25 bodů)

Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou $\{0, 1\}$, který přijímá všechna slova délky aspoň 2 znaky, která obsahují sudý počet znaků 0 a lichý počet znaků 1. Například slova 001, 1111, 0101010 automat přijme, zatímco slova 1, 0000, 100101 nepřijme. Přejímovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít co nejméně stavů.

Příklad 4 (25 bodů)

Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```
program AAA;
var A, B, C: integer;
begin
  read(A, B);
  while A > B do
    A := A - 2;
  while B > A do
    B := B - 2;
  C := A + B;
  writeln(C)
end.

main() /* AAA */
{
  int a, b, c;
  scanf("%d %d", &a, &b);
  while (a > b)
    a -= 2;
  while (b > a)
    b -= 2;
  c = a + b;
  printf("%d", c);
}
```

Určete, jak závisí výsledná hodnota proměnné C (tzn. výstup programu) na vstupních hodnotách proměnných A , B .

Varianta A – Řešení

Příklad 1

Existence integrálu

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx$$

je zřejmá, neboť integrand je spojitá funkce na \mathbb{R} . Integrál zapíšeme pomocí vzorce $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ a spočteme nejprve příslušné primitivní funkce.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{2} \, dx &= \frac{x^3}{6} + c, \\ \int \frac{x^2}{2} \cos 2x \, dx &= \frac{1}{4} x^2 \sin 2x - \int \frac{x}{2} \sin 2x \, dx = \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{4} \int \cos 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x + c. \end{aligned}$$

V tomto výpočtu jsme užili dvakrát metodu integrace per partes.

Je tedy

$$\int x^2 \sin^2 x \, dx = \int x^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x \right) + c,$$

odkud dostaneme dosazením mezí

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 2

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$$

- (i) Funkce je definována na celém \mathbb{R} . Protože uvažovaná funkce je 2π -periodická, stačí vyšetřit její chování na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.
- (ii) Z věty o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru \mathbb{R} .
- (iii) Protože funkce f je periodická, limity $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ neexistují. Máme však $f(-\pi) = f(\pi) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{-\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(0) = \frac{1}{2}$.
- (iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \sin x}{(2 - \sin x)^2}.$$

Derivace je na zkoumaném intervalu nulová právě když $x = \pi/6$ a $x = 5\pi/6$. Z jejího znaménka zjistíme, že f je rostoucí na intervalu $\langle -\pi, \pi/6 \rangle$, klesající na $\langle \pi/6, 5\pi/6 \rangle$ a opět rostoucí na intervalu $\langle 5\pi/6, \pi \rangle$. Srovnáním funkčních hodnot v bodech $-\pi, \pi$ a v kritických bodech $\pi/6$ a $5\pi/6$ zjistíme, že na zkoumaném intervalu je

$$\max f = f(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \min f = f(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

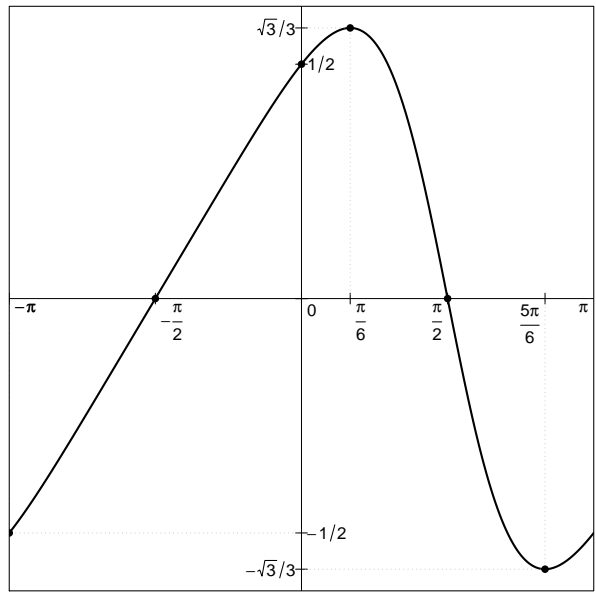
- (v) Vypočteme druhou derivaci

$$f''(x) = -2 \cos x \frac{1 + \sin x}{(2 - \sin x)^3}.$$

Z věty o vztahu znaménka druhé derivace a konvexnosti (konkávnosti) nyní snadno zjistíme, že f je konvexní na $(-\pi, -\pi/2)$, konkávní na $(-\pi/2, \pi/2)$ a konvexní na $(\pi/2, \pi)$.

- (vi) Funkci f jsme zkoumali na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Na celém definičním oboru \mathbb{R} dostaneme konečný výsledek 2π -periodickým prodloužením. Je zřejmé, že výsledná funkce nemá asymptotu v žádném z bodů $-\infty, \infty$.

(vii) Náčrtek grafu funkce f na základě provedených výpočtů:



Příklad 3 (25 bodů)

K řešení úlohy stačí konečný automat se šesti vnitřními stavy. Pomocí stavů automatu rozlišíme, zda již byly přečteny ze vstupu alespoň dva znaky, a pokud ano, zda byl dosud přečten sudý nebo lichý počet znaků 0 a 1 (čtyři kombinace – stavy D, E, F, G). Z nich koncový bude pouze stav G, který odpovídá sudému počtu znaků 0 a lichému počtu znaků 1. Stavy B a F jsou ekvivalentní, takže stav B můžeme vynechat. Minimalitu počtu stavů poté ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	0	1	
→ A	B	C	A = vstupní stav, žádný znak nebyl přečten
	B	D	B = přečten jeden znak 0
	C	E	C = přečten jeden znak 1
	D	F	D = sudý počet 0, sudý počet 1
	E	G	E = lichý počet 0, lichý počet 1
	F	D	F = lichý počet 0, sudý počet 1
← G	E	D	G = sudý počet 0, lichý počet 1

Příklad 4 (25 bodů)

Vstupní hodnoty proměnných A, B si označíme A_0 , B_0 . Rozlišíme tři případy:

a) Mají-li vstupní hodnoty A_0 , B_0 stejnou paritu, provede se nejvýše jeden z cyklů v programu. Proběhne podle potřeby tolikrát, až se proměnná s vyšší vstupní hodnotou bude přesně rovnat proměnné s nižší vstupní hodnotou. Obě proměnné tak dosáhnou hodnoty $\min(A_0, B_0)$ a výsledná hodnota proměnné C bude rovna **2 $\min(A_0, B_0)$** .

b) Mají-li vstupní hodnoty A_0 , B_0 různou paritu a přitom $A_0 < B_0$, první z cyklů v programu se neprovede ani jednou a ve druhém se potom proměnná B snižuje tak dlouho, až dosáhne hodnoty $A_0 - 1$.

Výsledná hodnota proměnné C bude proto rovna **2 $A_0 - 1$** .

c) Mají-li vstupní hodnoty A_0 , B_0 různou paritu a přitom $A_0 > B_0$, bude se v prvním cyklu proměnná A snižovat tak dlouho, až dosáhne hodnoty $B_0 - 1$. Tím ale výpočet nekončí. Poté je totiž splněna podmínka druhého cyklu a jeho tělo bude provedeno přesně jednou, přičemž se hodnota proměnné B sníží o 2 na hodnotu $B_0 - 2$.

Výsledná hodnota proměnné C bude proto rovna **2 $B_0 - 3$** .