Studijní program Matematika, obor Učitelství matematiky-informatiky pro SŠ
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtěte
$$\int_0^\pi x^2 \sin^2 x\, dx.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}.$$

(i) Určete definiční obor funkce f.
(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.
(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.
(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy — pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f.
(vi) Vypočtěte asymptoty.
(vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 3 (25 bodů)

Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou $\{0, 1\}$, který přijímá všechna slova délky aspoň 2 znaky, která obsahují sudý počet znaků 0 a lichý počet znaků 1. Například slova 001, 11111, 0101010 automat přijme, zatímco slova 1, 0000, 100101 nepřijme. Přechodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít co nejméně stavů.

Příklad 4 (25 bodů)

Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```
program AAA;
var A, B, C: integer;
begin
read(A, B);
while A > B do
  A := A - 2;
while B > A do
  B := B - 2;
C := A + B;
writeln(C)
end.
```

```
main()  /* AAA */
{
  int a, b, c;
  scanf("%d %d",&a,&b);
  while (a > b)
    a -= 2;
  while (b > a)
    b -= 2;
  c = a + b;
  printf("%d", c);
}
```

Určete, jak závisí výsledná hodnota proměnné C (tzn. výstup programu) na vstupních hodnotách proměnných A, B.

Studijní program Matematika, obor Učitelství matematiky-informatiky pro SŠ
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12

Varianta A – Řešení

Příklad 1

Existence integrálu

$$\int_0^\pi x^2 \sin^2 x \; dx$$

je zřejmá, neboť integrand je spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Integrál zapíšeme pomocí vzorce $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$ a spočteme nejprve příslušné primitivní funkce.

$$\int \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^3}{6} + c,$$

$$\int \frac{x^2}{2}\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}x^2\sin 2x - \int \frac{x}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{4}\int \cos 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + c.$$

V tomto výpočtu jsme užili dvakrát metodu integrace per partes.

Je tedy

$$\int x^2\sin^2 x\,dx = \int x^2\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x\right) + c,$$

odkud dostaneme dosazením mezí

$$\int_0^\pi x^2\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 2

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\cos x}{2-\sin x}$$

(i) Funkce je definována na celém $\mathbb{R}$. Protože uvažovaná funkce je 2π - periodická, stačí vyšetřit její chování na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.

(ii) Z věty o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $\mathbb{R}$.

(iii) Protože funkce f je periodická, limity $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ a $\lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistují.
Máme však $f(-\pi) = f(\pi) = -\frac{1}{2},\ f(\frac{-\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0,\ f(0) = \frac{1}{2}$.

(iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = \frac{1-2\sin x}{(2-\sin x)^2}.$$

Derivace je na zkoumaném intervalu nulová právě když $x = \pi/6$ a $x = 5\pi/6$. Z jejího znaménka zjistíme, že f je rostoucí na intervalu $\langle -\pi, \pi/6\rangle$, klesající na $\langle \pi/6, 5\pi/6\rangle$ a opět rostoucí na intervalu $\langle 5\pi/6, \pi\rangle$. Srovnáním funkčních hodnot v bodech $-\pi, \pi$ a v kritických bodech $\pi/6$ a $5\pi/6$ zjistíme, že na zkoumaném intervalu je

$$\max f = f(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \min f = f(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

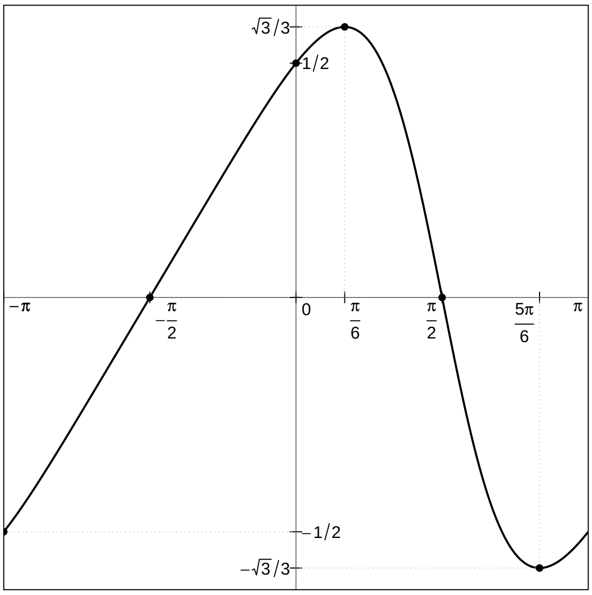
(v) Vypočteme druhou derivaci

$$f''(x) = -2\cos x\frac{1+\sin x}{(2-\sin x)^3}.$$

Z věty o vztahu znaménka druhé derivace a konvexnosti (konkávnosti) nyní snadno zjistíme, že f je konvexní na $(-\pi, -\pi/2)$, konkávní na $(-\pi/2, \pi/2)$ a konvexní na $(\pi/2, \pi)$.

(vi) Funkci f jsme zkoumali na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Na celém definičním oboru $\mathbb{R}$ dostaneme konečný výsledek 2π-periodickým prodloužením. Je zřejmé, že výsledná funkce nemá asymptotu v žádném z bodů $-\infty, \infty$.

(vii) Náčrtek grafu funkce f na základě provedených výpočtů:



Příklad 3 (25 bodů)

K řešení úlohy stačí konečný automat se šesti vnitřními stavy. Pomocí stavů automatu rozlišíme, zda již byly přečteny ze vstupu alespoň dva znaky, a pokud ano, zda byl dosud přečten sudý nebo lichý počet znaků 0 a 1 (čtyři kombinace – stavy D, E, F, G). Z nich koncový bude pouze stav G, který odpovídá sudému počtu znaků 0 a lichému počtu znaků 1. Stavy B a F jsou ekvivalentní, takže stav B můžeme vynechat. Minimalitu počtu stavů poté ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	0	1	
→ A	B	C	A = vstupní stav, žádný znak nebyl přečten
B	D	E	B = přečten jeden znak 0
C	E	D	C = přečten jeden znak 1
D	F	G	D = sudý počet 0, sudý počet 1
E	G	F	E = lichý počet 0, lichý počet 1
F	D	E	F = lichý počet 0, sudý počet 1
← G	E	D	G = sudý počet 0, lichý počet 1

Příklad 4 (25 bodů)

Vstupní hodnoty proměnných A, B si označíme A_0, B_0. Rozlišíme tři případy:

a) Mají-li vstupní hodnoty A_0, B_0 stejnou paritu, provede se nejvýše jeden z cyklů v programu. Proběhne podle potřeby tolikrát, až se proměnná s vyšší vstupní hodnotu bude přesně rovnat proměnné s nižší vstupní hodnotou. Obě proměnné tak dosáhnou hodnoty $\min(A_0, B_0)$ a výsledná hodnota proměnné C bude rovna **$2 \min(A_0, B_0)$**.

b) Mají-li vstupní hodnoty A_0, B_0 různou paritu a přitom $A_0 < B_0$, první z cyklů v programu se neprovede ani jednou a ve druhém se potom proměnná B snižuje tak dlouho, až dosáhne hodnoty A_0-1.
Výsledná hodnota proměnné C bude proto rovna **$2 A_0 - 1$**.

c) Mají-li vstupní hodnoty A_0, B_0 různou paritu a přitom $A_0 > B_0$, bude se v prvním cyklu proměnná A snižovat tak dlouho, až dosáhne hodnoty B_0-1. Tím ale výpočet nekončí. Poté je totiž splněna podmínka druhého cyklu a jeho tělo bude provedeno přesně jednou, přičemž se hodnota proměnné B sníží o 2 na hodnotu B_0-2.
Výsledná hodnota proměnné C bude proto rovna **$2 B_0 - 3$**.