

Studijní program Matematika
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtěte

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}.$$

- (i) Určete definiční obor funkce f .
- (ii) Zkoumejte spojitost funkce f .
- (iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f .
- (iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrém — pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
- (v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f .
- (vi) Vypočtěte asymptoty.
- (vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f .

Příklad 3 (25 bodů)

Zjistěte, zda funkce

$$f(x, y, z) = \operatorname{arctg} xyz$$

nabývá na množině

$$M = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0, z \geq 0\}$$

největší (nejmenší) hodnoty. Pokud ano, vypočtěte je.

Příklad 4 (25 bodů)

Zjistěte, pro která $a, b \in \mathbb{Z}$ bude matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 - b & 3 \\ 1 & 2 + a & 4 & 6 \\ 2 & 4 & b - 6 & 7 \\ 1 & 2 - a & 2 - b & 1 \end{pmatrix}$$

regulární. Dále určete, pro která taková $a, b \in \mathbb{Z}$ bude mít matice A^{-1} všechny prvky celočíselné.

Studijní program Matematika
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12
Varianta A – Řešení

Příklad 1

Existence integrálu

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx$$

je zřejmá, neboť integrand je spojitá funkce na \mathbb{R} . Integrál zapíšeme pomocí vzorce $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ a spočteme nejprve příslušné primitivní funkce.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{2} \, dx &= \frac{x^3}{6} + c, \\ \int \frac{x^2}{2} \cos 2x \, dx &= \frac{1}{4} x^2 \sin 2x - \int \frac{x}{2} \sin 2x \, dx = \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{4} \int \cos 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x + c. \end{aligned}$$

V tomto výpočtu jsme užili dvakrát metodu integrace per partes.

Je tedy

$$\int x^2 \sin^2 x \, dx = \int x^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x \right) + c,$$

odkud dostaneme dosazením mezí

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 2

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$$

- (i) Funkce je definována na celém \mathbb{R} . Protože uvažovaná funkce je 2π -periodická, stačí vyšetřit její chování na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.
- (ii) Z věty o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru \mathbb{R} .
- (iii) Protože funkce f je periodická, limity $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ neexistují. Máme však $f(-\pi) = f(\pi) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{-\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(0) = \frac{1}{2}$.
- (iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \sin x}{(2 - \sin x)^2}.$$

Derivace je na zkoumaném intervalu nulová právě když $x = \pi/6$ a $x = 5\pi/6$. Z jejího znaménka zjistíme, že f je rostoucí na intervalu $\langle -\pi, \pi/6 \rangle$, klesající na $\langle \pi/6, 5\pi/6 \rangle$ a opět rostoucí na intervalu $\langle 5\pi/6, \pi \rangle$. Srovnáním funkčních hodnot v bodech $-\pi, \pi$ a v kritických bodech $\pi/6$ a $5\pi/6$ zjistíme, že na zkoumaném intervalu je

$$\max f = f(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \min f = f(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

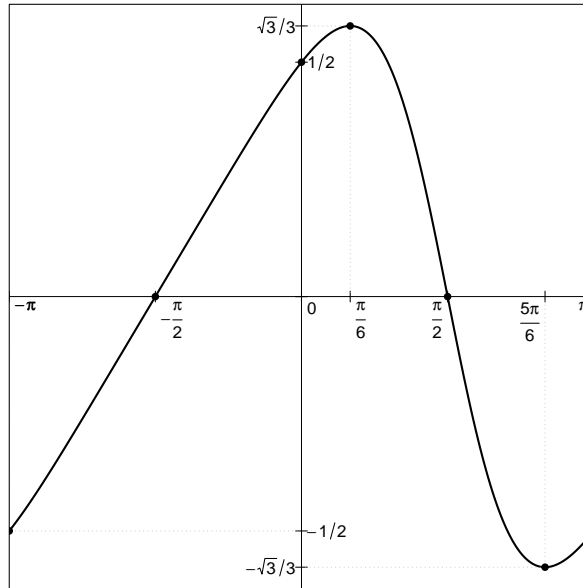
- (v) Vypočteme druhou derivaci

$$f''(x) = -2 \cos x \frac{1 + \sin x}{(2 - \sin x)^3}.$$

Z věty o vztahu znaménka druhé derivace a konvexnosti (konkávnosti) nyní snadno zjistíme, že f je konvexní na $(-\pi, -\pi/2)$, konkávní na $(-\pi/2, \pi/2)$ a konvexní na $(\pi/2, \pi)$.

- (vi) Funkci f jsme zkoumali na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Na celém definičním oboru \mathbb{R} dostaneme konečný výsledek 2π -periodickým prodloužením. Je zřejmé, že výsledná funkce nemá asymptotu v žádném z bodů $-\infty, \infty$.

(vii) Náčrtek grafu funkce f na základě provedených výpočtů:



Příklad 3

Funkce $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} xyz$ má na \mathbb{R}^3 spojité parciální derivace všech řádů a množina M je omezená a uzavřená (tj., kompaktní v \mathbb{R}^3); nabývá tedy f na M svého maxima a minima. V bodech, pro něž $y = 0$ a $z = 0$ platí $f(x, 0, y) = f(x, y, 0) = 0$.

Zbývá tedy vyšetřit body, podezřelé z toho, že v nich funkce nabývá lokálního extrému vzhledem k množině $M_1 = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 + z^2 = 1, y > 0, z > 0\}$. Získáme je metodou Lagrangeových multiplikátorů, kterou můžeme použít, neboť její podmínky jsou splněny.

Označme

$$L(x, y, z, \lambda) = \operatorname{arctg} xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

Hledáme nyní body (x, y, z) , které řeší rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{1 + (xyz)^2} yz + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{1 + (xyz)^2} xz + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{1 + (xyz)^2} yx + 2\lambda z = 0$$

a zároveň leží v množině M_1 .

Řešení této soustavy dává dva podezřelé body, ležící v množině M_1 , a sice

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \quad \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Je nyní snadno vidět, že

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

je maximem a

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

je minimem funkce f na množině M .

Příklad 4

Počítejme

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3-b & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2+a & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & b-6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2-a & 2-b & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3-b & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+b & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3b-12 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3-b & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+b & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3b-12 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3-b & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+b & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b-12 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & b & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Determinant matice A je roven $a(2b-12)$. Matice je proto regulární právě když $a \neq 0$ a $b \neq 6$. Dále vidíme, že třetí řádek inverzní matice pro $a \neq 0, b \neq 6$ bude $\frac{1}{2b-12}(0, -1, 1, -1)$. Pro žádné $b \in \mathbb{Z}$ nebude tento vektor celočíselný, a tedy matice A^{-1} nebude celočíselnou maticí pro žádnou volbu $a, b \in \mathbb{Z}$.