Studijní program Matematika
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtěte

$$\int_0^\pi x^2 \sin^2 x \, dx.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}.$$

(i) Určete definiční obor funkce f.
(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.
(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.
(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy — pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f.
(vi) Vypočtěte asymptoty.
(vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 3 (25 bodů)

Zjistěte, zda funkce

$$f(x, y, z) = \operatorname{arctg} xyz$$

nabývá na množině

$$M = \{[x, y, z];\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

největší (nejmenší) hodnoty. Pokud ano, vypočtěte je.

Příklad 4 (25 bodů)

Zjistěte, pro která $a, b \in \mathbb{Z}$ bude matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 1 & 2+a & 4 & 6 \\ 2 & 4 & b-6 & 7 \\ 1 & 2-a & 2-b & 1 \end{pmatrix}$$

regulární. Dále určete, pro která taková $a, b \in \mathbb{Z}$ bude mít matice A^{-1} všechny prvky celočíselné.

Studijní program Matematika
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12
Varianta A – Řešení

Příklad 1

Existence integrálu
$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \; dx$$
je zřejmá, neboť integrand je spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Integrál zapíšeme pomocí vzorce $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$ a spočteme nejprve příslušné primitivní funkce.
$$\int \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{x^3}{6} + c,$$
$$\int \frac{x^2}{2}\cos 2x\, dx = \frac{1}{4}x^2 \sin 2x - \int \frac{x}{2}\sin 2x\, dx = \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{4}\int \cos 2x\, dx =$$
$$= \frac{1}{4}x^2 \sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + c.$$
V tomto výpočtu jsme užili dvakrát metodu integrace per partes.
Je tedy
$$\int x^2 \sin^2 x\, dx = \int x^2 \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x\right) + c,$$
odkud dostaneme dosazením mezí
$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x\, dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 2

Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = \frac{\cos x}{2-\sin x}$$

(i) Funkce je definována na celém $\mathbb{R}$. Protože uvažovaná funkce je 2π - periodická, stačí vyšetřit její chování na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.

(ii) Z věty o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $\mathbb{R}$.

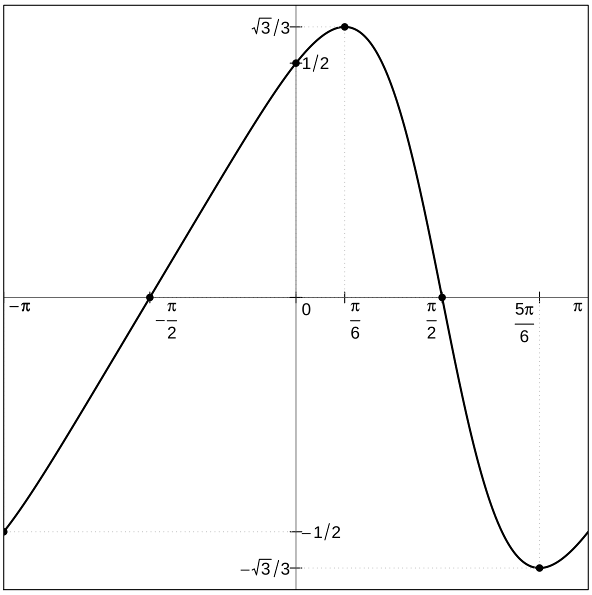
(iii) Protože funkce f je periodická, limity $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ a $\lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistují.
Máme však $f(-\pi) = f(\pi) = -\frac{1}{2},\ f(\frac{-\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0,\ f(0) = \frac{1}{2}$.

(iv) Snadno vypočteme
$$f'(x) = \frac{1-2\sin x}{(2-\sin x)^2}.$$
Derivace je na zkoumaném intervalu nulová právě když $x = \pi/6$ a $x = 5\pi/6$. Z jejího znaménka zjistíme, že f je rostoucí na intervalu $\langle -\pi, \pi/6\rangle$, klesající na $\langle \pi/6, 5\pi/6\rangle$ a opět rostoucí na intervalu $\langle 5\pi/6, \pi\rangle$. Srovnáním funkčních hodnot v bodech $-\pi, \pi$ a v kritických bodech $\pi/6$ a $5\pi/6$ zjistíme, že na zkoumaném intervalu je
$$\max f = f(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \min f = f(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(v) Vypočteme druhou derivaci
$$f''(x) = -2\cos x \frac{1+\sin x}{(2-\sin x)^3}.$$
Z věty o vztahu znaménka druhé derivace a konvexnosti (konkávnosti) nyní snadno zjistíme, že f je konvexní na $(-\pi, -\pi/2)$, konkávní na $(-\pi/2, \pi/2)$ a konvexní na $(\pi/2, \pi)$.

(vi) Funkci f jsme zkoumali na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Na celém definičním oboru $\mathbb{R}$ dostaneme konečný výsledek 2π-periodickým prodloužením. Je zřejmé, že výsledná funkce nemá asymptotu v žádném z bodů $-\infty, \infty$.

(vii) Náčrtek grafu funkce f na základě provedených výpočtů:



Příklad 3

Funkce $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} xyz$ má na $\mathbb{R}^3$ spojité parciální derivace všech řádů a množina M je omezená a uzavřená (tj., kompaktní v $\mathbb{R}^3$); nabývá tedy f na M svého maxima a minima. V bodech, pro něž $y = 0$ a $z = 0$ platí $f(x, 0, y) = f(x, y, 0) = 0$.

Zbývá tedy vyšetřit body, podezřelé z toho, že v nich funkce nabývá lokálního extrému vzhledem k množině $M_1 = \{[x, y, z];\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y > 0,\ z > 0\}$. Získáme je metodou Lagrangeových multiplikátorů, kterou můžeme použít, neboť její podmínky jsou splněny.

Označme

$$L(x, y, z, \lambda) = \operatorname{arctg} xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

Hledáme nyní body $(x, y.z)$, které řeší rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{1}{1 + (xyz)^2} yz + 2\lambda x = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{1 + (xyz)^2} xz + 2\lambda y = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{1}{1 + (xyz)^2} yx + 2\lambda z = 0
\end{aligned}$$

a zároveň leží v množině M_1.

Řešení této soustavy dává dva podezřelé body, ležící v množině M_1, a sice

$$[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}], \qquad [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}].$$

Je nyní snadno vidět, že

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

je maximem a

$$f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

je minimem funkce f na množině M.

Příklad 4

Počítejme

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 3-b & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 2+a & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0\\
2 & 4 & b-6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 2-a & 2-b & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 3-b & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & a & 1+b & 3 & -1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 3b-12 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\
0 & -a & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 3-b & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & a & 1+b & 3 & -1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 3b-12 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & b & 1 & -2 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 3-b & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & a & 1+b & 3 & -1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2b-12 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1\\
0 & 0 & b & 1 & -2 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right).
$$

Determinant matice A je roven $a(2b-12)$. Matice je proto regulární právě když $a \neq 0$ a $b \neq 6$. Dále vidíme, že třetí řádek inverzní matice pro $a \neq 0, b \neq 6$ bude $\frac{1}{2b-12}(0,-1,1,-1)$. Pro žádné $b \in \mathbb{Z}$ nebude tento vektor celočíselný, a tedy matice A^{-1} nebude celočíselnou maticí pro žádnou volbu $a, b \in \mathbb{Z}$.