Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Vzorové zadání

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtěte

$$\int_M \frac{y}{2-x}\, d\lambda(x,y,z),$$

kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ 2x + y + z < 4\}$ a λ je Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 2 (25 bodů)

Zjistěte, zda funkce $f(x,y) = (1+x)y^2$ nabývá na množině

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

největší (nejmenší) hodnoty. Pokud ano, vypočtěte je.

Příklad 3 (25 bodů)

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou

$$f(x;\theta) = \begin{cases} c_\theta x(1+x)^{-(\theta+2)} & x > 0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad \text{kde } \theta > 0 \text{ je neznámý parametr.}$$

(i) Vypočtěte konstantu c_θ.
(ii) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ.
(iii) Spočítejte Fisherovu míru informace pro toto rozdělení.

Příklad 4 (25 bodů)

Uvažujte aktiva $1, \dots, N$. Jejich výnosy jsou náhodné veličiny se středními hodnotami (očekávanými výnosy) $r = (r_1, \dots, r_N)^\mathsf{T}$ (symbol $^\mathsf{T}$ znamená transpozici) a varianční maticí $\boldsymbol{V}$. Předpokládejme, že investor investuje bohatství ve výši $W = 1$. Dále předpokládejme, že prodeje nakrátko (short sales) jsou povoleny.

(i) Vysvětlete pojem portfolia.
(ii) Vyjádřete obecně očekávaný výnos portfolia a rozptyl výnosu portfolia.
(iii) Uvažujte dvě aktiva 1 resp. 2 s očekávanými výnosy 8% resp. 14% a varianční maticí

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 36 \end{pmatrix} [\%^2].$$

Najděte portfolio s minimálním rozptylem výnosu portfolia a spočtěte jeho očekávaný výnos.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Řešení vzorového zadání

Příklad 1 (25 bodů)

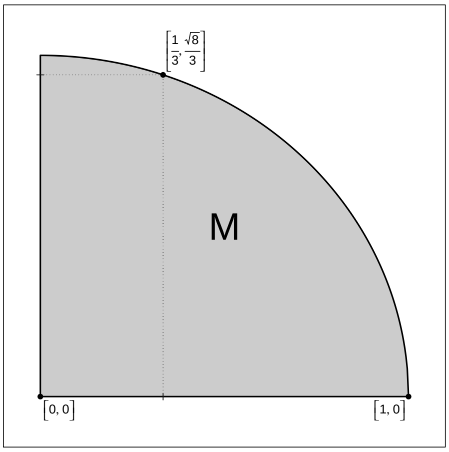
V množině M mohou ležet pouze body splňující $x \in (0,2)$, $y \in (0,4)$, $z \in (0,4)$. Budeme integrovat nejprve podle z, potom podle y a nakonec podle x (díky Fubiniově větě lze pořadí integrace libovolně měnit). Je-li pevně dáno $x \in (0,2)$, máme omezení $y+z < 2(2-x)$ pro $z \in (0,4)$, tedy $0 < y < 2(2-x)$. Je-li pevně dáno $x \in (0,2)$ a $0 < y < 2(2-x)$, z musí splňovat $0 < z < 2(2-x) - y$.

Počítáme

$$\begin{aligned}\int_M \frac{y}{2-x}\,dx\,dy\,dz &= \int_0^2 \frac{1}{2-x} \int_0^{2(2-x)} y \int_0^{2(2-x)-y} 1\,dz\,dy\,dx\\ &= \int_0^2 \frac{1}{2-x} \int_0^{2(2-x)} y[2(2-x)-y]\,dy\,dx\\ &= \frac{4}{3}\int_0^2 (2-x)^2\,dx = \frac{32}{9}.\end{aligned}$$

Příklad 2 (25 bodů)

Množina M je podmnožinou $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ a je tedy omezená. Protože je také uzavřená, je v $\mathbb{R}^2$ kompaktní. Protože $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, f je spojitá na M. Z toho plyne, že f musí na M nabývat své minimální a maximální hodnoty.



Body podezřelými z nabývání extrémů, jsou jednak kritické body funkce f ležící v M^0 (uvnitř M), jednak body na hranici $H(M) = M - M^0$.

Kritické body uvnitř M:

Protože soustava rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(1+x) = 0$$

nemá v M^0 řešení, je $\max_M f = \max_{H(M)} f$ a $\min_M f = \min_{H(M)} f$.

Body na hranici M:

Hranici $H(M)$ rozepišme jako sjednocení tří disjunktních množin $H(M) = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, kde $H_1 = \{[x, y]; x \in \langle 0, 1\rangle,\ y = 0\}$, $H_2 = \{[x, y]; x = 0,\ y \in (0, 1\rangle\}$, $H_3 = \{[x, y]; x \in (0, 1),\ y \in (0, 1),\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Protože $f(x, y) \geq 0$ na M, jsou body množiny M, v nichž $f(x, y) = 0$, body minima f na M. Snadno vidíme, že f nabývá minima v M právě když $[x, y] \in H_1$.

Na H_2 je $f(x, y) = f(0, y) = y^2$. Tato funkce v H_2 nabývá maximální hodnoty 1 v bodě $[0, 1]$. Tento bod zařadíme mezi body podezřelé z nabývání maxima.

K vyhledání podezřelých bodů v H_3 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce má tvar $L(x, y, \lambda) = y^2 + xy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = y^2 - 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 2y(x - \lambda + 1) = 0, \quad \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Soustava má tři řešení, z nichž jen jedno leží v H_3, a sice $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}]$ ($\lambda = 4/3$). Funkční hodnota v tomto bodě je $32/27$.

Srovnáním hodnot f v bodech $[0, 1]$ a $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}]$ zjistíme, že $\max_M f = f(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}) = 32/27$.

Shrnutí:

- Funkce f nabývá na množině M maxima v bodě $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}]$. Její maximální hodnota je $32/27$.
- Funkce f nabývá na množině M minima v bodech $[x, 0]$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$. Její minimální hodnota je 0.

Příklad 3 (25 bodů)

(i) Máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = c_\theta \int_0^\infty \frac{x}{(1 + x)^{\theta+2}}\, dx = 1.$$

Proveďme substituci $z = 1/(1 + x)$ a počítejme

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1 + x)^{\theta+2}}\, dx = \int_0^1 z^{\theta-1}(1 - z)\, dz = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta + 1} = \frac{1}{\theta(\theta + 1)}.$$

Je tedy $c_\theta = \theta(\theta + 1)$.

(ii)

Věrohodnostní funkce: $$L(\theta) = [\theta(\theta + 1)]^n \prod_{i=1}^n \frac{X_i}{(1 + X_i)^{\theta+2}}$$

Logaritmická věrohodnost: $$\ell(\theta) = n[\log \theta + \log(\theta + 1)] + \sum_{i=1}^n \log X_i - (\theta + 2) \sum_{i=1}^n \log(1 + X_i)$$

Skórová statistika: $$U(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \frac{n}{\theta + 1} - \sum_{i=1}^n \log(1 + X_i)$$

Skórová funkce: $$U_i(\theta) = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta + 1} - \log(1 + X_i)$$

Věrohodnostní rovnice: $$U(\hat{\theta}) = 0 \quad \text{neboli} \quad \frac{n}{\hat{\theta}} + \frac{n}{\hat{\theta} + 1} = \sum_{i=1}^n \log(1 + X_i) \equiv S_X$$

Rovnici $\frac{n}{\hat\theta} + \frac{n}{\hat\theta+1} = S_X$, kde $S_X > 0$, upravíme na tvar $S_X\hat\theta^2 + (S_X - 2)\hat\theta - 1 = 0$. Ta má dvě řešení: jedno je záporné a jedno,

$$\hat\theta = \frac{2 - S_X + \sqrt{S_X^2 + 4}}{2S_X},$$

je kladné. Je to maximálně věrohodný odhad, neboť $-\frac{\partial U(\theta)}{\partial\theta} > 0 \quad \forall\theta > 0$.

(iii) Fisherova míra informace jest

$$\mathsf{E} - \frac{\partial U_i(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{(\theta+1)^2}.$$

Příklad 4 (25 bodů)

(i) Portfolio je soubor finančních aktiv. Je reprezentováno podíly (alokací, diverzifikací), které investor investuje do jednotlivých aktiv. Označíme-li $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)^\mathsf{T}$ tyto podíly, pak při investovaném bohatství ve výši 1 musí platit $x_1 + \dots + x_N = 1$.

(ii) Nechť $\boldsymbol{R} = (R_1, \dots, R_N)^\mathsf{T}$ označuje výnosy aktiv $1, \dots, N$. Výnos portfolia $\boldsymbol{x}$ je $\boldsymbol{R}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$. Očekávaný výnos portfolia je $r_p = \mathsf{E}\,\boldsymbol{R}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$ a rozptyl výnosu portfolia je $\sigma_p^2 = \mathsf{var}\,\boldsymbol{R}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}$.

(iii) V tomto případě je $\boldsymbol{r} = (8, 14)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\mathsf{T}$, $\sigma_p^2 = 9(x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2)$. S ohledem na podmínku $x_1 + x_2 = 1$ je $\sigma_p^2 = 9(7x_1^2 - 10x_1 + 4)$. Tato funkce je konvexní, minimum tudíž nastává tam, kde je derivace rovna nule

$$\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial x_1} = 126x_1 - 90 \overset{!}{=} 0,$$

což dává optimální váhu $x_1^* = 5/7$, takže $x_2^* = 2/7$, optimální portfolio je tedy $\boldsymbol{x}^* = (5/7, 2/7)^\mathsf{T}$ a očekávaný výnos je $r_p^* = \frac{5}{7}\,8 + \frac{2}{7}\,14 = 9.71$.