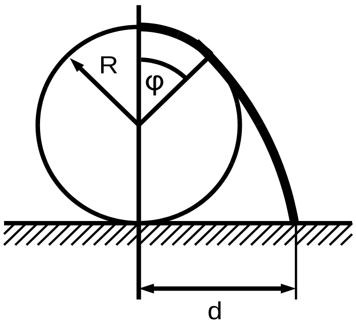
Přijímací zkouška pro nav. magister. studium, obor učitelství F-M, 2012, varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Koule o poloměru R=10 cm leží na vodorovné rovině. Z jejího nejvyššího bodu vypustíme s nulovou počáteční rychlostí bod o hmotností m. Bod klouže po kulové ploše bez tření. Určete polohu, danou úhlem φ (viz obrázek),.kde se bod od kulové plochy oddělí. Dále určete vzdálenost d mezi místem jeho dopadu na zmíněnou vodorovnou rovinu a místem, kde se rovina dotýká koule.



Příklad 2 (25 bodů)

Víte-li, že elektrická pevnost vzduchu je asi 2 kV/mm, odhadněte minimální rozměry čtvercové antény radaru, která dokáže na frekvenci 10 GHz vysílat s pulsním výkonem P=5MW. Permeabilita vakua je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, rychlost světla $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Příklad 3 (25 bodů)

Vypočtěte

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x dx$$

Příklad 4 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$$

(i) Určete definiční obor funkce f

(ii) Zkoumejte spojitost funkce f

(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f .

(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy — pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?

(v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f

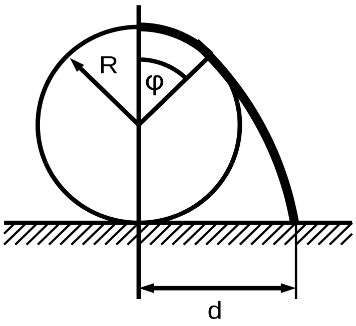
(vi) Vypočtěte asymptoty.

(vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f .

Přijímací zkouška pro nav. magister. studium, obor učitelství F-M, 2012, varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Koule o poloměru R=10 cm leží na vodorovné rovině. Z jejího nejvyššího bodu vypustíme s nulovou počáteční rychlostí bod o hmotností m. Bod klouže po kulové ploše bez tření. Určete polohu, danou úhlem φ (viz obrázek),.kde se bod od kulové plochy oddělí. Dále určete vzdálenost d mezi místem jeho dopadu na zmíněnou vodorovnou rovinu a místem, kde se rovina dotýká koule.



Řešení 1

Ze zákona zachování mechanické energie plyne pro pohyb na kouli pro rychlost v v bodě popsaném úhlem φ vztah

(4 body)
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\varphi) \qquad (1)$$

(g je tíhové zrychlení). Odstředivá síla, rovná

(4 body)
$$F_o = \frac{mv^2}{R} = 2mg(1-\cos\varphi) \qquad (2)$$

tedy s rostoucím úhlem vzrůstá, naopak složka tíhové síly kolmá k povrchu koule $F_k = mg\cos\varphi$ klesá, Proto v okamžiku, kdy se obě síly vyrovnají,

(2 body)
$$F_o = F_k \qquad (3)$$

bod opustí povrch koule – z podmínky (3) plyne pro úhel φ vztah

(2 body)
$$\cos\varphi = \frac{2}{3} \qquad (4)$$

a pro odpovídající rychlost

(2 body)
$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \qquad (5)$$

Svislá složka této rychlosti je $v\cdot\sin\varphi$, takže ve svislém směru za čas t bod urazí dráhu $\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\varphi\cdot t$. Při dopadu tato dráha bude rovna $R(1+\cos\varphi)$, takže k určení doby pádu t od „odtržení“ dostáváme kvadratickou rovnici

(3 body)
$$\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\varphi\cdot t - R(1+\cos\varphi) = 0 \qquad (6)$$

Z obou řešení nás ovšem zajímá pouze kladný kořen

(2 body)
$$t_1 = \frac{1}{g}\left(-v\sin\varphi + \sqrt{v^2\sin^2\varphi + 2gR(1+\cos\varphi)}\right) \qquad (7)$$

Rychlost ve vodorovném směru při „odtržení“ je $v \cdot \cos\varphi$, takže dráha uražená za čas t_1 ve vodorovném směru je $t_1 v \cdot \cos\varphi$ a výsledná vzdálenost d je

(3 body) $$d = R\sin\varphi + t_1 v \cdot \cos\varphi \qquad (8)$$

a po dosazení z (4),(5),(7) vychází

(3 body) $$d = \frac{20\sqrt{2} + 5\sqrt{5}}{27} R \qquad (9)$$

(pro kontrolu uveďme mezivýsledek $t_1 = \dfrac{10 - \sqrt{10}}{3\sqrt{3}} \sqrt{\dfrac{R}{g}}$)

Příklad 2 (25 bodů)

Víte-li, že elektrická pevnost vzduchu je asi 2 kV/mm, odhadněte minimální rozměry čtvercové antény radaru, která dokáže na frekvenci 10 GHz vysílat s pulsním výkonem P=5MW. Permeabilita vakua je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, rychlost světla $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s.

Řešení 2

Pro účely našeho odhadu pokládejme rozložení elektromagnetického pole v okolí ústí antény za rovinnou vlnu. Amplituda intenzity elektrického pole musí zůstávat menší než $2 \cdot 10^{6}$ V/m, její efektivní hodnota bude proto

(4 body)
$$E_{ef} < \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 10^{6}\ V/m \tag{1}$$

Označíme-li

(5 bodů)
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c = 120\pi\ \Omega \tag{2}$$

vlnovou impedanci vakua, bude pro efektivní hodnotu intenzity magnetického pole platit

(4 body)
$$H_{ef} = \frac{E_{ef}}{Z_0} < \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 120\pi} \cdot 10^{6}\ A/m \tag{3}$$

Časová střední hodnota $\overline{P}_{UP}$ složky Umovova-Poyntingova vektoru ve směru výstupu z antény je tedy

(4 body)
$$\overline{P}_{UP} = E_{ef} H_{ef} = \frac{E_{ef}^{\ 2}}{Z_0} < \frac{2}{120\pi} \cdot 10^{12}\ W/m^2 \tag{4}$$

Při takto „omezené“ hustotě přeneseného výkonu pak tedy pro přenos výkonu P=5MW potřebujeme nejméně plochu

(4 body)
$$S = \frac{P}{\overline{P}_{UP}} = \frac{5}{2} \cdot 120\pi \cdot 10^{-6}\ m^2 = 3\pi \cdot 10^{-4}\ m^2 \cong 9 \cdot 10^{-4}\ m^2 \tag{5}$$

a strana čtvercové antény vychází na cca 3 cm.

(4 body)

Příklad 3 (25 bodů)

Vypočtěte

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x dx$$

Řešení 3

Existence integrálu $$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x dx$$

je zřejmá, neboť integrand je spojitá funkce na R. Integrál zapíšeme pomocí vzorce $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ a spočteme nejprve příslušné primitivní funkce.

$$\int \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} + c,$$

$$\int \frac{x^2}{2} \cos 2x \, dx = \frac{1}{4} x^2 \sin 2x - \int \frac{x}{2} \sin 2x \, dx = \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos 2x \, dx =$$
$$= \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + c.$$

V tomto výpočtu jsme užili dvakrát metodu integrace per partes.

Je tedy

$$\int x^2 \sin^2 x \, dx = \int x^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x \right) + c.$$

odkud dostaneme dosazením mezí

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}$$

Příklad 4 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$$

(i) Určete definiční obor funkce f

(ii) Zkoumejte spojitost funkce f

(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f .

(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy — pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?

(v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f

(vi) Vypočtěte asymptoty.

(vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f .

Řešení 4

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$$

(i) Funkce je definována na celém R. Protože uvažovaná funkce je 2π - periodická, stačí vyšetřit její chování

na intervalu $\left(-\pi, \pi\right)$

(ii) Z věty o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru R.

(iii) Protože funkce f je periodická, limity $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ a $\lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistují.

Máme však $f(-\pi) = f(\pi) = -\dfrac{1}{2}$, $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $f(0) = \dfrac{1}{2}$

(iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = \frac{1 - 2\sin x}{(2 - \sin x)^2}$$

Derivace je na zkoumaném intervalu nulová právě když x = π/6 a x = 5π/6. Z jejího znaménka zjistíme, že f je rostoucí na intervalu $\left(-\pi, \pi/6\right)$, klesající na $\left(\pi/6, 5\pi/6\right)$ a opět rostoucí na intervalu $\left(5\pi/6, \pi\right)$

Srovnáním funkčních hodnot v bodech −π, π a v kritických bodech π/6 a 5π/6 zjistíme, že na zkoumaném intervalu je

$\max f = f(\pi/6) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\min f = f(5\pi/6) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(v) Vypočteme druhou derivaci

$$f''(x) = -2\cos x \frac{1+\sin x}{(2-\sin x)^3}$$

Z věty o vztahu znaménka druhé derivace a konvexnosti (konkávnosti) nyní snadno zjistíme, že f je konvexní na $(-\pi, -\pi/2)$, konkávní na $(-\pi/2, \pi/2)$ a konvexní na $(\pi/2, \pi)$.

(vi) Funkci f jsme zkoumali na intervalu $(-\pi, \pi)$. Na celém definičním oboru R dostaneme konečný výsledek 2π-periodickým prodloužením. Je zřejmé, že výsledná funkce nemá asymptotu v žádném z bodů $-\infty$, ∞.

(vii) Náčrtek grafu funkce f na základě provedených výpočtů: