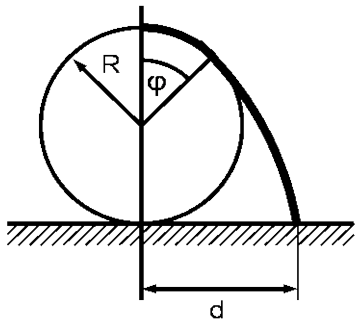
Přijímací zkouška z fyziky 2012 - Nav. Mgr. - varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Koule o poloměru R=10 cm leží na vodorovné rovině. Z jejího nejvyššího bodu vypustíme s nulovou počáteční rychlostí bod o hmotností m. Bod klouže po kulové ploše bez tření. Určete polohu, danou úhlem φ (viz obrázek),.kde se bod od kulové plochy oddělí. Dále určete vzdálenost d mezi místem jeho dopadu na zmíněnou vodorovnou rovinu a místem, kde se rovina dotýká koule.



Příklad 2 (25 bodů)

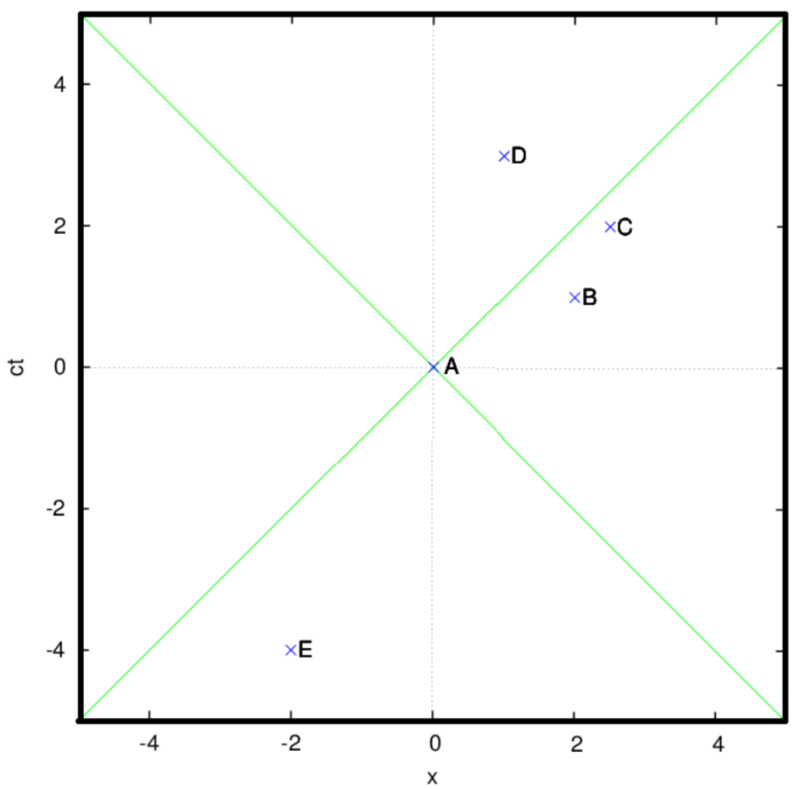
Víte-li, že elektrická pevnost vzduchu je asi 2 kV/mm, odhadněte minimální rozměry čtvercové antény radaru, která dokáže na frekvenci 10 GHz vysílat s pulsním výkonem P=5MW. Permeabilita vakua je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, rychlost světla $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Příklad 3 (25 bodů)

Jakou rychlost musí mít α -částice, abychom pozorovali difrakční maximum od rovin d_{hkl} = 0,82 Å na difrakčním úhlu 120°?

Příklad 4 (25 bodů)

Na následujícím obrázku je znázorněn prostoročasový diagram, ve kterém jsou potlačeny směry y,z. Budeme tedy uvažovat děje pouze v rovině y = 0, z = 0. Jednotky na osách jsou metry.



a) Jakým způsobem se na prostoročase měří „vzdálenosti“? Napište vyjádření v kartézských souřadnicích.

b) Spočítejte prostoročasovou vzdálenost událostí E (o souřadnicích $(ct,x) = (-4,-2)$) a D (o souřadnicích $(ct,x) = (3,1)$).

c) Prostoročasové intervaly mezi dvěma událostmi dělíme na časupodobné, světelné a prostorupodobné. Jaký charakter mají intervaly mezi následujícími dvojicemi událostí: {E,D}, {A, B}, {A,D} a {B,C} ?

Nyní uvažujte kromě inerciálního systému, jehož osy jsou znázorněny na obrázku, ještě druhý inerciální systém (se souřadnicemi (ct',x')), jehož počátek v čase $t = 0 = t'$ splývá s počátkem původního systému a pohybuje se vůči němu rychlostí v v kladném směru osy x.

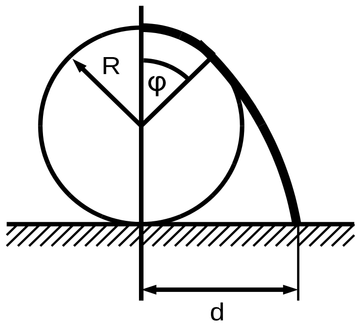
d) Je možné vhodnou volbou rychlosti v zařídit, aby se události A a D staly z hlediska čárkovaného systému na stejném místě nebo ve stejném čase? Případnou rychlost vypočtěte.

e) Je možné vhodnou volbou rychlosti v zařídit, aby se události A a B (o souřadnicích $(ct,x) = (1, 2)$) staly z hlediska čárkovaného systému na stejném místě nebo ve stejném čase? I zde odpovídající rychlost vypočtěte.

Přijímací zkouška z fyziky 2012 - Nav. Mgr. - varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Koule o poloměru R=10 cm leží na vodorovné rovině. Z jejího nejvyššího bodu vypustíme s nulovou počáteční rychlostí bod o hmotnosti m. Bod klouže po kulové ploše bez tření. Určete polohu, danou úhlem φ (viz obrázek),.kde se bod od kulové plochy oddělí. Dále určete vzdálenost d mezi místem jeho dopadu na zmíněnou vodorovnou rovinu a místem, kde se rovina dotýká koule.



Řešení 1

Ze zákona zachování mechanické energie plyne pro pohyb na kouli pro rychlost v v bodě popsaném úhlem φ vztah

(4 body) $$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\varphi) \tag{1}$$

(g je tíhové zrychlení). Odstředivá síla, rovná

(4 body) $$F_o = \frac{mv^2}{R} = 2mg(1-\cos\varphi) \tag{2}$$

tedy s rostoucím úhlem vzrůstá, naopak složka tíhové síly kolmá k povrchu koule $F_k = mg\cos\varphi$ klesá, Proto v okamžiku, kdy se obě síly vyrovnají,

(2 body) $$F_o = F_k \tag{3}$$

bod opustí povrch koule – z podmínky (3) plyne pro úhel φ vztah

(2 body) $$\cos\varphi = \frac{2}{3} \tag{4}$$

a pro odpovídající rychlost

(2 body) $$v = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \tag{5}$$

Svislá složka této rychlosti je $v \cdot \sin\varphi$, takže ve svislém směru za čas t bod urazí dráhu $\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\varphi \cdot t$. Při dopadu tato dráha bude rovna $R(1+\cos\varphi)$, takže k určení doby pádu t od „odtržení“ dostáváme kvadratickou rovnici

(3 body) $$\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\varphi \cdot t - R(1+\cos\varphi) = 0 \tag{6}$$

Z obou řešení nás ovšem zajímá pouze kladný kořen

(2 body) $$t_1 = \frac{1}{g}\left(-v\sin\varphi + \sqrt{v^2\sin^2\varphi + 2gR(1+\cos\varphi)}\right) \tag{7}$$

Rychlost ve vodorovném směru při „odtržení“ je $v \cdot \cos\varphi$, takže dráha uražená za čas t_1 ve vodorovném směru je $t_1 v \cdot \cos\varphi$ a výsledná vzdálenost d je

(3 body) $$d = R\sin\varphi + t_1 v \cdot \cos\varphi \tag{8}$$

a po dosazení z (4),(5),(7) vychází

(3 body) $$d = \frac{20\sqrt{2} + 5\sqrt{5}}{27} R \tag{9}$$

(pro kontrolu uveďme mezivýsledek $t_1 = \dfrac{10 - \sqrt{10}}{3\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{R}{g}}$)

Příklad 2 (25 bodů)

Víte-li, že elektrická pevnost vzduchu je asi 2 kV/mm, odhadněte minimální rozměry čtvercové antény radaru, která dokáže na frekvenci 10 GHz vysílat s pulsním výkonem P=5MW. Permeabilita vakua je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, rychlost světla $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Řešení 2

Pro účely našeho odhadu pokládejme rozložení elektromagnetického pole v okolí ústí antény za rovinnou vlnu. Amplituda intenzity elektrického pole musí zůstávat menší než $2 \cdot 10^6$ V/m, její efektivní hodnota bude proto

(4 body)
$$E_{ef} < \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 10^6 \ V/m \tag{1}$$

Označíme-li

(5 bodů)
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c = 120\pi \ \Omega \tag{2}$$

vlnovou impedanci vakua, bude pro efektivní hodnotu intenzity magnetického pole platit

(4 body)
$$H_{ef} = \frac{E_{ef}}{Z_0} < \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 120\pi} \cdot 10^6 \ A/m \tag{3}$$

Časová střední hodnota $\overline{P}_{UP}$ složky Umovova-Poyntingova vektoru ve směru výstupu z antény je tedy

(4 body)
$$\overline{P}_{UP} = E_{ef} H_{ef} = \frac{E_{ef}^2}{Z_0} < \frac{2}{120\pi} \cdot 10^{12} \ W/m^2 \tag{4}$$

Při takto „omezené" hustotě přeneseného výkonu pak tedy pro přenos výkonu P=5MW potřebujeme nejméně plochu

(4 body)
$$S = \frac{P}{\overline{P}_{UP}} = \frac{5}{2} \cdot 120\pi \cdot 10^{-6} \ m^2 = 3\pi \cdot 10^{-4} \ m^2 \cong 9 \cdot 10^{-4} \ m^2 \tag{5}$$

a strana čtvercové antény vychází na cca 3 cm.

(4 body)

Příklad 3 (25 bodů)

Jakou rychlost musí mít α -částice, abychom pozorovali difrakční maximum od rovin d_{hkl} = 0,82 Å na difrakčním úhlu 120°?

Řešení 3

Známé a neznámé, převedení na jednotky SI:

α -částice ... jádro atomu He - hmotnost m ≅ 4·m_n (≅ m_p ≅ m_u) (2 body)

= 4·1,66·10^{-27} kg (1 bod)

h = 6,6·10^{-34} J·s (2 bod)

d_{hkl} = 0,82 Å = 0,82 · 10^{-10} m (1 bod)

2Θ = 120° [difrakční úhel je 2Θ, nikoli jen Θ (2 body)]

v = ?

Pro určení rychlosti α-částice vyjdeme z de Broglieho vztahu

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{h}{m\lambda},$$

[(5 bodů), při záměně h <-> ħ 3 body;
za objasnění, že nám stačí řešit případ nerelativisticky (může být až na konci řešení jako ověření) další 2 body]

kde chybí vyjádřit již jen vlnovou délku. K tomu poslouží znalost Braggovy rovnice

$\lambda = 2d_{hkl} \sin \vartheta$, (5 bodů)

kde $\vartheta = 60^\circ$

Tedy:

$$v = \frac{h}{m\lambda} = \frac{h}{4 \cdot m_u \cdot 2 \cdot d_{hkl} \cdot \sin 60^\circ}$$ (1 bod)

Numericky:

$$v = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 0{,}82 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{J \cdot s \cdot kg^{-1} \cdot m^{-1}}$$

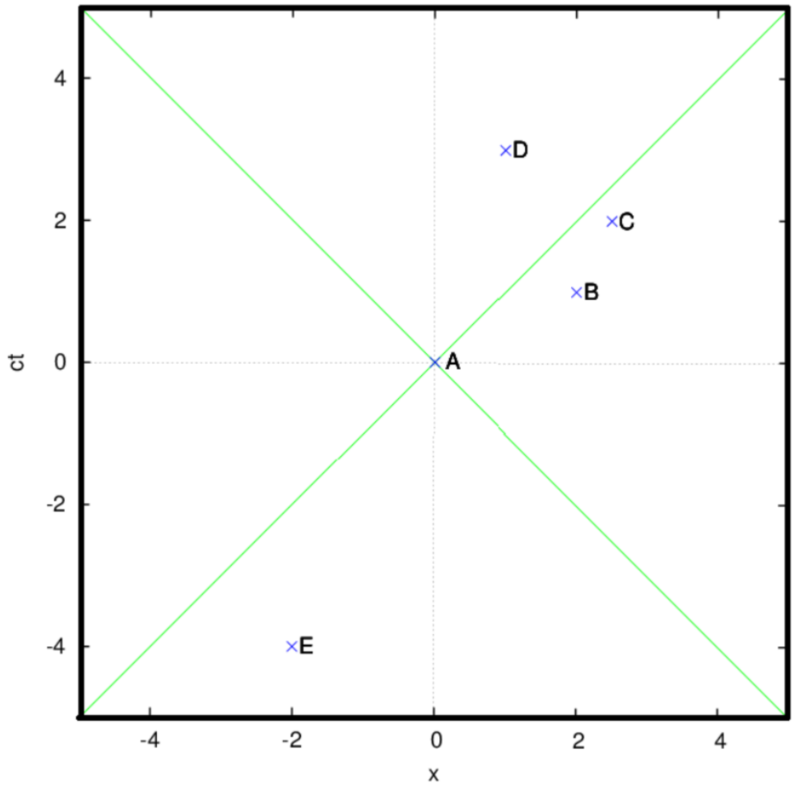
$$v = \frac{6{,}6}{4 \cdot 1{,}66 \cdot 0{,}82 \cdot \sqrt{2}} \cdot 10^3 \ \mathrm{J \cdot s \cdot kg^{-1} \cdot m^{-1}} \cong \frac{1}{1{,}1} \cdot 10^3 \ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot s \cdot kg^{-1} \cdot m^{-1}}$$

$$v \cong 0{,}9 \cdot 10^3 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

za numerický výpočet (bez kalkulačky) 4 body; za úspěšnou rozměrovou zkoušku 2 body

Jak vidno, předpoklad postačujícího nerelativistického postupu se potvrdila – rychlost částice je dostatečně malá. (body viz výše)

Příklad 4 (25 bodů)
Na následujícím obrázku je znázorněn prostoročasový diagram, ve kterém jsou potlačeny směry y,z. Budeme tedy uvažovat děje pouze v rovině y = 0, z = 0. Jednotky na osách jsou metry.



a) Jakým způsobem se na prostoročase měří „vzdálenosti“? Napište vyjádření v kartézských souřadnicích.

b) Spočítejte prostoročasovou vzdálenost událostí E (o souřadnicích (ct,x) = (−4,−2)) a D (o souřadnicích (ct,x) = (3,1)).

c) Prostoročasové intervaly mezi dvěma událostmi dělíme na časupodobné, světelné a prostorupodobné. Jaký charakter mají intervaly mezi následujícími dvojicemi událostí: {E,D}, {A, B}, {A,D} a {B,C} ?

Nyní uvažujte kromě inerciálního systému, jehož osy jsou znázorněny na obrázku, ještě druhý inerciální systém (se souřadnicemi (ct′,x′)), jehož počátek v čase t = 0 = t′ splývá s počátkem původního systému a pohybuje se vůči němu rychlostí v v kladném směru osy x.

d) Je možné vhodnou volbou rychlosti v zařídit, aby se události A a D staly z hlediska čárkovaného systému na stejném místě nebo ve stejném čase? Případnou rychlost vypočtěte.

e) Je možné vhodnou volbou rychlosti v zařídit, aby se události A a B (o souřadnicích (ct,x) = (1, 2)) staly z hlediska čárkovaného systému na stejném místě nebo ve stejném čase? I zde odpovídající rychlost vypočtěte.

Řešení 4
a) Vzdálenosti měříme na základě prostoročasového intervalu (neboli Minkowskiho metrikou), který je dán vztahem (používáme signaturu(-+++))

(5 bodů) $$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

b) Jelikož Δx = 3m a cΔt = 7m, dostaneme

(4 body) $$\Delta s^2 = \text{-40m2}$$

c) Stačí odhadnout, zda jsou události relativně vůči sobě vzdáleny více v čase (při počítání s pomocí ct) nebo více v prostoru (nebo spočíst znaménko Δs^2). Intervaly {E,D},{A,D}a {B,C}jsou časupodobné. Interval {A,B} je prostorupodobný.

(4 body)

d) Událost D je v absolutní budoucnosti události A, není tedy možné nalézt systém, kde by byly současné. Soumístné budou v systému jehož časová osa prochází obě události. Rovnice časové osy je na základě Lorentzových transformací dána takto: 0 = x′ = γ(x - vt). Tedy

(6 bodů)

$$v = \frac{x_D}{ct_D} = \frac{c}{3}$$

e) Událost B je v relativní současnosti události A, není tedy možné nalézt systém, kde by byly soumístné. Současné budou v systému, jehož x-ová osa prochází oběma událostmi. Rovnice této osy je na základě Lorentzových transformací dána takto: $0 = t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2 x}\right)$. Tedy

(6 bodů).

$$v = \frac{ct_B}{x_B} c = \frac{c}{2}$$