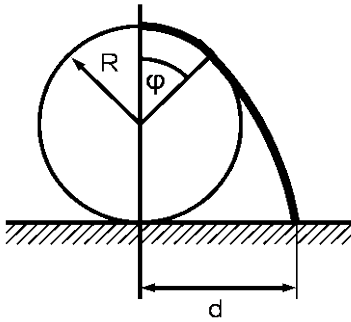


Přijímací zkouška z fyziky 2012 - Nav. Mgr. - varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Koule o poloměru $R=10$ cm leží na vodorovné rovině. Z jejího nejvyššího bodu vypustíme s nulovou počáteční rychlostí bod o hmotnosti m . Bod klouže po kulové ploše bez tření. Určete polohu, danou úhlem φ (viz obrázek), kde se bod od kulové plochy oddělí. Dále určete vzdálenost d mezi místem jeho dopadu na zmíněnou vodorovnou rovinu a místem, kde se rovina dotýká koule.



Příklad 2 (25 bodů)

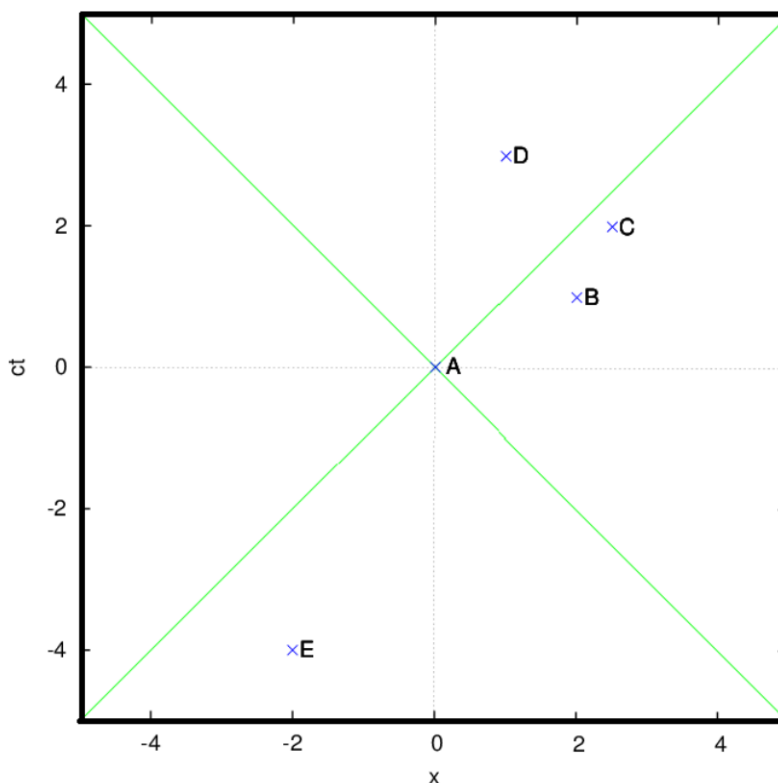
Víte-li, že elektrická pevnost vzduchu je asi 2 kV/mm, odhadněte minimální rozměry čtvercové antény radaru, která dokáže na frekvenci 10 GHz vysílat s pulsním výkonem $P=5$ MW. Permeabilita vakua je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, rychlost světla $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Příklad 3 (25 bodů)

Jakou rychlost musí mít α -částice, abychom pozorovali difrakční maximum od rovin $d_{hkl} = 0,82$ Å na difrakčním úhlu 120° ?

Příklad 4 (25 bodů)

Na následujícím obrázku je znázorněn prostoročasový diagram, ve kterém jsou potlačeny směry y, z . Budeme tedy uvažovat děje pouze v rovině $y = 0, z = 0$. Jednotky na osách jsou metry.



a) Jakým způsobem se na prostoročase měří „vzdálenosti“? Napište vyjádření v kartézských souřadnicích.

b) Spočítejte prostoročasovou vzdálenost událostí E (o souřadnicích $(ct,x) = (-4,-2)$) a D (o souřadnicích $(ct,x) = (3,1)$).

c) Prostoročasové intervaly mezi dvěma událostmi dělíme na časupodobné, světelné a prostorupodobné. Jaký charakter mají intervaly mezi následujícími dvojicemi událostí: $\{E,D\}$, $\{A, B\}$, $\{A,D\}$ a $\{B,C\}$?

Nyní uvažujte kromě inerciálního systému, jehož osy jsou znázorněny na obrázku, ještě druhý inerciální systém (se souřadnicemi (ct',x')), jehož počátek v čase $t = 0 = t'$ splývá s počátkem původního systému a pohybuje se vůči němu rychlostí v v kladném směru osy x .

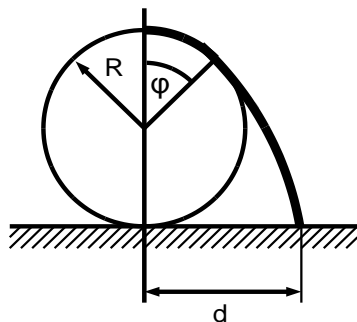
d) Je možné vhodnou volbou rychlosti v zařídit, aby se události A a D staly z hlediska čárkovaného systému na stejném místě nebo ve stejném čase? Případnou rychlost vypočtete.

e) Je možné vhodnou volbou rychlosti v zařídit, aby se události A a B (o souřadnicích $(ct,x) = (1, 2)$) staly z hlediska čárkovaného systému na stejném místě nebo ve stejném čase? I zde odpovídající rychlost vypočtete.

Přijímací zkouška z fyziky 2012 - Nav. Mgr. - varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Koule o poloměru $R=10$ cm leží na vodorovné rovině. Z jejího nejvyššího bodu vypustíme s nulovou počáteční rychlostí bod o hmotnosti m . Bod klouže po kulové ploše bez tření. Určete polohu, danou úhlem φ (viz obrázek), kde se bod od kulové plochy oddělí. Dále určete vzdálenost d mezi místem jeho dopadu na zmíněnou vodorovnou rovinu a místem, kde se rovina dotýká koule.



Řešení 1

Ze zákona zachování mechanické energie plyne pro pohyb na kouli pro rychlost v v bodě popsaném úhlem φ vztah

$$(4 \text{ body}) \quad \frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos \varphi) \quad (1)$$

(g je tíhové zrychlení). Odstředivá síla, rovná

$$(4 \text{ body}) \quad F_o = \frac{mv^2}{R} = 2mg(1 - \cos \varphi) \quad (2)$$

tedy s rostoucím úhlem vzrůstá, naopak složka tíhové síly kolmá k povrchu koule $F_k = mg \cos \varphi$ klesá, Proto v okamžiku, kdy se obě síly vyrovnají,

$$(2 \text{ body}) \quad F_o = F_k \quad (3)$$

bod opustí povrch koule – z podmínky (3) plyne pro úhel φ vztah

$$(2 \text{ body}) \quad \cos \varphi = \frac{2}{3} \quad (4)$$

a pro odpovídající rychlost

$$(2 \text{ body}) \quad v = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \quad (5)$$

Svislá složka této rychlosti je $v \cdot \sin \varphi$, takže ve svislém směru za čas t bod urazí dráhu

$\frac{1}{2}gt^2 + v \sin \varphi \cdot t$. Při dopadu tato dráha bude rovna $R(1 + \cos \varphi)$, takže k určení doby pádu t od „odtržení“ dostáváme kvadratickou rovnici

$$(3 \text{ body}) \quad \frac{1}{2}gt^2 + v \sin \varphi \cdot t - R(1 + \cos \varphi) = 0 \quad (6)$$

Z obou řešení nás ovšem zajímá pouze kladný kořen

$$(2 \text{ body}) \quad t_1 = \frac{1}{g} \left(-v \sin \varphi + \sqrt{v^2 \sin^2 \varphi + 2gR(1 + \cos \varphi)} \right) \quad (7)$$

Rychlost ve vodorovném směru při „odtržení“ je $v \cdot \cos \varphi$, takže dráha uražená za čas t_1 ve vodorovném směru je $t_1 v \cdot \cos \varphi$ a výsledná vzdálenost d je

(3 body)

$$d = R \sin \varphi + t_1 v \cdot \cos \varphi \quad (8)$$

a po dosazení z (4),(5),(7) vychází

(3 body)

$$d = \frac{20\sqrt{2} + 5\sqrt{5}}{27} R \quad (9)$$

(pro kontrolu uveďme mezivýsledek $t_1 = \frac{10 - \sqrt{10}}{3\sqrt{3}} \sqrt{\frac{R}{g}}$)

Příklad 2 (25 bodů)

Víte-li, že elektrická pevnost vzduchu je asi 2 kV/mm, odhadněte minimální rozměry čtvercové antény radaru, která dokáže na frekvenci 10 GHz vysílat s pulsním výkonem $P=5\text{MW}$. Permeabilita vakua je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, rychlost světla $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Řešení 2

Pro účely našeho odhadu pokládejme rozložení elektromagnetického pole v okolí ústí antény za rovinnou vlnu. Amplituda intenzity elektrického pole musí zůstat menší než $2 \cdot 10^6 \text{ V/m}$, její efektivní hodnota bude proto

(4 body)
$$E_{ef} < \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 10^6 \text{ V/m} \quad (1)$$

Označíme-li

(5 bodů)
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = 120\pi \Omega \quad (2)$$

vlnovou impedanci vakua, bude pro efektivní hodnotu intenzity magnetického pole platit

(4 body)
$$H_{ef} = \frac{E_{ef}}{Z_0} < \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 120\pi} \cdot 10^6 \text{ A/m} \quad (3)$$

Časová střední hodnota \bar{P}_{UP} složky Umovova-Poyntingova vektoru ve směru výstupu z antény je tedy

(4 body)
$$\bar{P}_{UP} = E_{ef} H_{ef} = \frac{E_{ef}^2}{Z_0} < \frac{2}{120\pi} \cdot 10^{12} \text{ W/m}^2 \quad (4)$$

Při takto „omezené“ hustotě přeneseného výkonu pak tedy pro přenos výkonu $P=5\text{MW}$ potřebujeme nejméně plochu

(4 body)
$$S = \frac{P}{\bar{P}_{UP}} = \frac{5}{2} \cdot 120\pi \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 3\pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cong 9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad (5)$$

a strana čtvercové antény vychází na cca 3 cm.

(4 body)

Příklad 3 (25 bodů)

Jakou rychlost musí mít α -částice, abychom pozorovali difrakční maximum od rovin $d_{hkl} = 0,82 \text{ \AA}$ na difrakčním úhlu 120° ?

Řešení 3

Znamé a neznámé, převedení na jednotky SI:

α -částice ... jádro atomu He - hmotnost $m \cong 4 \cdot m_n (\cong m_p \cong m_u)$ (2 body)
 $= 4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ (1 bod)

$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ (2 bod)

$d_{hkl} = 0,82 \text{ \AA} = 0,82 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ (1 bod)

$2\Theta = 120^\circ$ [difrakční úhel je 2Θ , nikoli jen Θ] (2 body)

$v = ?$

Pro určení rychlosti α -částice vyjdeme z de Broglieho vztahu

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \Rightarrow v = \frac{h}{m\lambda},$$

[(5 bodů), při záměně $h \leftrightarrow \hbar$ 3 body;

za objasnění, že nám stačí řešit případ nerelativisticky (může být až na konci řešení jako ověření) další 2 body]

kde chybí vyjádřit již jen vlnovou délku. K tomu poslouží znalost Braggovy rovnice

$$\lambda = 2d_{hkl} \sin \vartheta, \quad (5 \text{ bodů})$$

kde $\vartheta = 60^\circ$

Tedy:

$$v = \frac{h}{m\lambda} = \frac{h}{4 \cdot m_u \cdot 2 \cdot d_{hkl} \cdot \sin 60^\circ} \quad (1 \text{ bod})$$

Numericky:

$$v = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 0,82 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$v = \frac{6,6}{4 \cdot 1,66 \cdot 0,82 \cdot \sqrt{2}} \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cong \frac{1}{1,1} \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

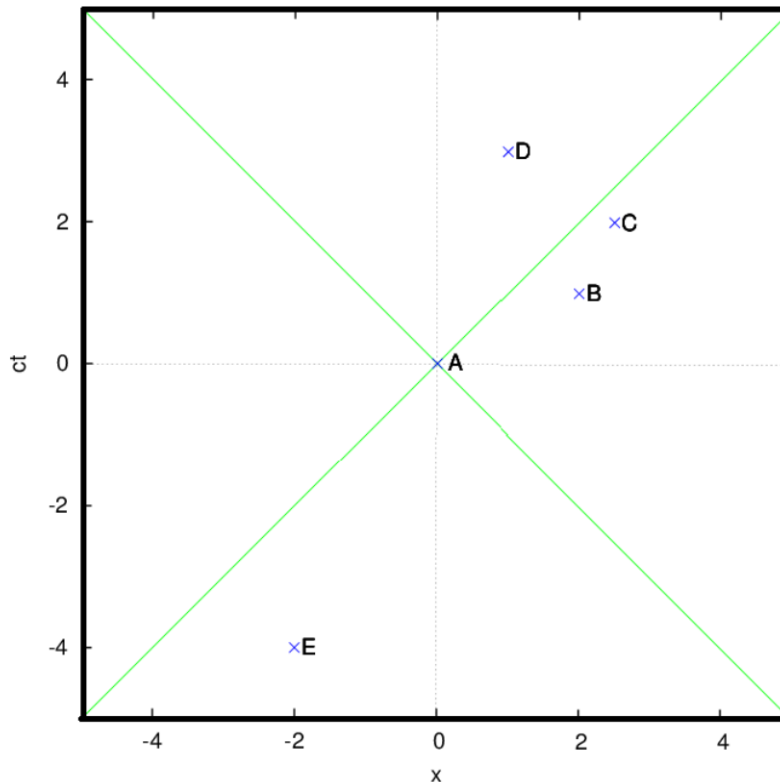
$$v \cong 0,9 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

za numerický výpočet (bez kalkulačky) 4 body; za úspěšnou rozměrovou zkoušku 2 body

Jak vidno, předpoklad postačujícího nerelativistického postupu se potvrdila – rychlost částice je dostatečně malá. (body viz výše)

Příklad 4 (25 bodů)

Na následujícím obrázku je znázorněn prostoročasový diagram, ve kterém jsou potlačeny směry y, z . Budeme tedy uvažovat děje pouze v rovině $y = 0, z = 0$. Jednotky na osách jsou metry.



- Jakým způsobem se na prostoročase měří „vzdálenosti“? Napište vyjádření v kartézských souřadnicích.
- Spočítejte prostoročasovou vzdálenost událostí E (o souřadnicích $(ct, x) = (-4, -2)$) a D (o souřadnicích $(ct, x) = (3, 1)$).
- Prostoročasové intervaly mezi dvěma událostmi dělíme na časupodobné, světelné a prostorupodobné. Jaký charakter mají intervaly mezi následujícími dvojicemi událostí: $\{E, D\}$, $\{A, B\}$, $\{A, D\}$ a $\{B, C\}$?
Nyní uvažujte kromě inerciálního systému, jehož osy jsou znázorněny na obrázku, ještě druhý inerciální systém (se souřadnicemi (ct', x')), jehož počátek v čase $t = 0 = t'$ splývá s počátkem původního systému a pohybuje se vůči němu rychlostí v v kladném směru osy x .
- Je možné vhodnou volbou rychlosti v zařídit, aby se události A a D staly z hlediska čárkovaného systému na stejném místě nebo ve stejném čase? Případnou rychlost vypočtěte.
- Je možné vhodnou volbou rychlosti v zařídit, aby se události A a B (o souřadnicích $(ct, x) = (1, 2)$) staly z hlediska čárkovaného systému na stejném místě nebo ve stejném čase? I zde odpovídající rychlost vypočtěte.

Řešení 4

a) Vzdálenosti měříme na základě prostoročasového intervalu (neboli Minkowského metrikou), který je dán vztahem (používáme signaturu $(-+++)$)

(5 bodů)
$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

b) Jelikož $\Delta x = 3\text{m}$ a $c\Delta t = 7\text{m}$, dostaneme

(4 body)
$$\Delta s^2 = -40\text{m}^2$$

c) Stačí odhadnout, zda jsou události relativně vůči sobě vzdáleny více v čase (při počítání s pomocí ct) nebo více v prostoru (nebo spočítat znaménko Δs^2). Interval $\{E, D\}$, $\{A, D\}$ a $\{B, C\}$ jsou časupodobné. Interval $\{A, B\}$ je prostorupodobný.

(4 body)

d) Událost D je v absolutní budoucnosti události A, není tedy možné nalézt systém, kde by byly současné. Soumísné budou v systému jehož časová osa prochází obě události. Rovnice časové osy je na základě Lorentzových transformací dána takto: $0 = x' = \gamma(x - vt)$. Tedy

(6 bodů)

$$v = \frac{x_D}{ct_D} = \frac{c}{3}$$

e) Událost B je v relativní současnosti události A, není tedy možné nalézt systém, kde by byly současné. Současné budou v systému, jehož x-ová osa prochází oběma událostmi. Rovnice této osy je na základě

Lorentzových transformací dána takto: $0 = t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$. Tedy

(6 bodů).

$$v = \frac{ct_B}{x_B} c = \frac{c}{2}$$