Вступний іспит MFF Карлового університету в Празі

Навчальна програма Математика, бакалаврат

Навчальна програма Інформатика, бакалаврат

2015, варіант A

На кожне з десяти завдань пропонуються наступні п'ять відповідей: a, b, c, d, e. Ваше завдання для кожного завдання та кожної відповіді вирішити і вказати, правильна вона чи неправильна, чи це твердження вірне чи невірне тощо. Час виконання тесту **75 хв.**

Оцінювання. За кожне завдання можна отримати 10 балів. Повну кількість балів за завдання ви отримаєте, якщо для кожної з п'яти запропонованих відповідей правильно[1] позначите, правильна вона чи неправильна. За кожне завдання, в якому ви відзначили одну або кілька неправильних відповідей, ви отримаєте 0 балів, незалежно від кількості правильно позначених відповідей. За завдання, на яких ви не позначили жодної відповіді неправильно, ви отримаєте 2 бали за кожну правильно позначену відповідь (таким чином за п'ять правильно позначених відповідей ви отримаєте 10 балів).

Спосіб позначення та виправлення. Вибрана відповідь позначається заповненим полем відповідного кружечку. Якщо ви вже позначили відповідь і хочете її виправити, ви можете відмінити свій вибір великим хрестиком заповнене поле і заповніть інше поле. Однак ви не можете вибрати поле, яке ви виправили, знову. Відповіді, позначені інакше, вважаються непоміченими. У наступному прикладі зверніть увагу, що останні два стовпці мають однакове значення, різниця лише в виправленнях.

Приклад. Як приклад, наводимо кількість балів, яку ви отримаєте за різні відповіді у завданні.
«Результатом прикладу 1 + 1 є»:

		Відповіді		Відповіді		Відповіді		Відповіді	
		Так	Ні	Так	Ні	Так	Ні	Так	Ні
(a)	2	●	○	●	○	○	○	○	○
(b)	3	○	●	○	○	○	●	~~●~~	●
(c)	Менше, ніж 12	●	○	●	○	○	○	~~●~~	○
(d)	Позитивне число	●	○	○	○	●	○	●	~~●~~
(e)	1	○	●	●	○	○	●	~~●~~	●
Бали:		**10**		**0**		**6**		**6**	

[1] Добре позначеною вважається відповідь, у якій правильною відповіддю є «Так», і ви відмічаєте лише «Так», або правильна відповідь «Ні», і ви відмічаєте лише «Ні». Неправильною відповіддю вважається відповідь, де ви відповідаєте «Так», але ви відзначаєте «Ні», або правильною відповіддю є «Ні», але ви відзначаєте «Так». Всі інші варіанти вважаються питанням без відповіді.

У наступних завданнях визначте, яке твердження вірне, а яке невірне
(Так = вірне, Ні = невірне).

1. Розглянемо функцію f, визначену для всіх дійсних чисел x за формулою $f(x) = \sin(x^2)$. Визначте, які твердження про функцію f є правдивими.

(a) f є ін'єктивна.
(b) f є парна.
(c) f є зростаюча.
(d) f є невід'ємна.
(e) f є обмежена.

2. Нехай P_1 — площа кругу, обмеженого колом, описаним рівностороннім трикутником ABC. Далі позначимо через P_2 площу кругу, обмеженого колом вписаного до рівностороннього трикутника ABC. Визначте, які твердження є правдивими про співвідношення P_1 і P_2.

(a) СпіввідношенняP_1 і P_2 рівно цілому числу.
(b) Співвідношення P_1 і P_2 рівно ірраціональному числу.
(c) P_1 в два рази більша ніж P_2.
(d) P_1 в чотири рази більша ніж P_2.
(e) Співвідношення P_1 і P_2 залежить від довжини сторони ABC.

3. Між числами 5 і 60 ми вложили ще чотири цілих числа a, b, c, d так, щоб усі шість чисел утворили послідовні члени алгебраїчної послідовності в порядку: 5, a, b, c, d, 60. Визначте, які твердження є правдивими про числа a, b, c, d.

(a) $a + b + c + d < 150$.
(b) $a + b + c + d < 200$.
(c) $a + d = b + c$.
(d) $a \cdot d = b \cdot c$.
(e) $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ділиться на дев'ять без залишку.

4. Нехай M є множина всіх дійсних розв’язків рівняння:

$$|\ln x| + \ln(2x) = \ln(5x - 2)$$

($\ln$ означає натуральний логарифм). Визначте, які твердження о множині M є правдивими.

(a) M містить рівно три елементи.
(b) M складається тільки з додатних чисел.
(c) $M \cap \langle 2, \infty)$ складається з одного елементу.
(d) $M \cap (0, 1) = \emptyset$.
(e) $M \cap (1, 2) = \emptyset$.

5. Кинемо п’ять монет. Кожна монета, незалежно від інших, може впасти на реверс (число) або аверс (герб), обидва мають ймовірність $1/2$. Будемо говорити, що нам випала *збалансована позиція*, якщо дві монети перевернуті догори реверсом, а інші три аверсом, або навпаки - тобто три реверсом і дві інші монети аверсом.

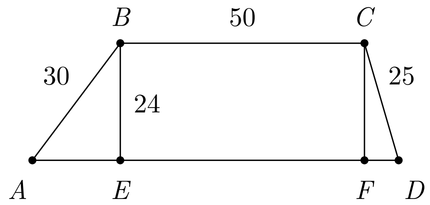
Позицію, коли лише одна монета перевернута на одну сторону, а чотири інші — на інший бік, ми називаємо *незбалансованою.*

Якщо всі монети впали однаковою стороною вгору, це *крайня* позиція.

Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Ймовірність того, що випаде збалансована позиція більше ніж ½.
(b) Ймовірність того, що випаде збалансована позиція більше ніж 2/3.
(c) Ймовірність того, що випаде незбалансована позиція більше ніж ⅓.
(d) Ймовірність того, що випаде незбалансована позиція більше ніж ½.
(e) Ймовірність того, що випаде крайня позиція більше ніж 1/10.

6. На малюнку зображено трапецію $ABCD$ та її висоти BE, CF; числа позначають довжини відповідних відрізків.



Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Довжина відрізку AE є менша, ніж 20.
(b) Довжина відрізку FD є менша, ніж 5.
(c) Принаймні одна з прямих AE, FD має ірраціональну довжину.
(d) Периметр трапеції дорівнює 180.
(e) Периметр трапеції дорівнює $1\ 500$.

7. Розміщуємо тури (вежі) на шаховій дошці 8×8. Ми називаємо положення тур *хорошим*, якщо

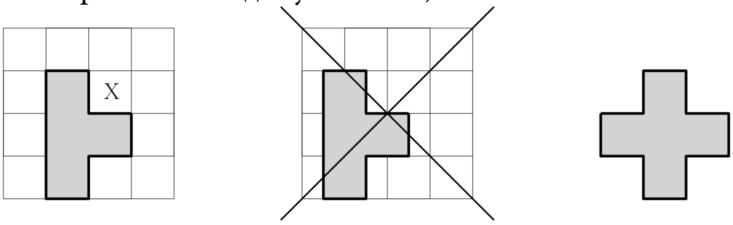
- у кожному стовпчику та в кожному ряду не більше двох тур; та
- кожна тура знаходиться в тому ж рядку або стовпці, що і якась інша.

Нехай V_k — кількість хороших положень з k турами, які між собою не відрізняються.

Визначте, які твердження є правдивими.

(a) V_2 – є парне число.
(b) $V_2 > 450$.
(c) $\sqrt{V_3}$ є ціле число.
(d) $V_3 > 3\,000$.
(e) З кожного хорошого положення з чотирма турами додаванням однієї тури можна створити хороше положення з п'ятьма турами.

8. Петро хоче розмістити до квадрату 4×4 сіру фігуру у формі „Т“ з чотирьох квадратиків (див. рисунок нижче вліво), причому фігуру можна повернути на кут кратний дев'яноста градусам. Фігуру розмістити можна тільки там, де „Т“ охоплює чотири цілі квадратики (ситуація в середині зображення не допускається).



Павло хоче перешкодити Петру тим, що деякі поля означе „x“. На жодне таке поле Петро не може поставити фігуру.

Позначимо за A найменше число з такими властивостями: Павло може означенням A придатних позицій завадити Петру розмістити його фігуру.

Далі позначимо за B аналогічне число, якщо Петро розміщує таку ж фігуру в квадрат 5×5. Нарешті, позначимо за C аналогічне число, якщо Петро розміщує фігуру у формі хреста (на малюнку вгорі справа) до квадрата 4×4. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) $A = 3$.
(b) $A = 4$.
(c) $B = 4$.
(d) $C = 2$.
(e) $C = 3$.

9. Нехай M є множина всіх дійсних розв'язків рівняння

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = e^{\frac{1}{2}\ln(1-\cos^2 x)}$$

($\ln$ означає натуральний логарифм). Визначте, які твердження о множині M є правдивими.

(a) M є кінечна.
(b) Якщо $x \in M$, то $-x \in M$.
(c) $M \cap (\pi/2, \pi)$ містить рівно один елемент.
(d) Якщо $x \in M$, то $3x \in M$.
(e) Якщо $x \in M$, то $\operatorname{tg} x = 1$.

10. Анічка, Беда, Кирило, Дана, Єва та Фанда змагалися в розгадуванні головоломок. За правильне вирішення головоломок гравці отримували бали, кожен гравець отримав різну кількість балів. Анічка отримала менше, ніж Єва і ніж Беда, який набрав менше, ніж Дана, але більше, ніж Фанда і Кирило. Єва набрала менше, ніж Дана і Фанда, у якого більше очок, ніж у Кирила.

Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Дана, безумовно, отримала найбільше очок.
(b) Неможливо визначити, хто набрав найбільше очок.
(c) Єва, безперечно, посідає одне з трьох останніх місць.
(d) Анічка, безперечно, була останньою або передостанньою.
(e) Фанда точно не виграв і не програв у змаганнях.

Відповіді:

1 b, e.

2 a, d.

3 a, b, c, e.

4 b, c, e.

5 a

6 a, d, e.

7 a, c, d.

8 b, d.

9 b, c, d.

10 a, c, d, e.

Вступний іспит MFF Карлового університету в Празі

Навчальна програма Математика, бакалаврат

Навчальна програма Інформатика, бакалаврат

2016, варіант A

На кожне з десяти завдань пропонуються наступні п'ять відповідей: a, b, c, d, e. Ваше завдання для кожного завдання та кожної відповіді вирішити і вказати, правильна вона чи неправильна, чи це твердження вірне чи невірне тощо. Час виконання тесту **75 хв.**

Оцінювання. За кожне завдання можна отримати 10 балів. Повну кількість балів за завдання ви отримаєте, якщо для кожної з п'яти запропонованих відповідей правильно[1] позначите, правильна вона чи неправильна. За кожне завдання, в якому ви відзначили одну або кілька неправильних відповідей, ви отримаєте 0 балів, незалежно від кількості правильно позначених відповідей. За завдання, на яких ви не позначили жодної відповіді неправильно, ви отримаєте 2 бали за кожну правильно позначену відповідь (таким чином за п'ять правильно позначених відповідей ви отримаєте 10 балів).

Спосіб позначення та виправлення. Вибрана відповідь позначається заповненим полем відповідного кружечку. Якщо ви вже позначили відповідь і хочете її виправити, ви можете відмінити свій вибір великим хрестиком заповнене поле і заповніть інше поле. Однак ви не можете вибрати поле, яке ви виправили, знову. Відповіді, позначені інакше, вважаються непоміченими. У наступному прикладі зверніть увагу, що останні два стовпці мають однакове значення, різниця лише в виправленнях.

Приклад. Як приклад, наводимо кількість балів, яку ви отримаєте за різні відповіді у завданні.
«Результатом прикладу 1 + 1 є»:

		Відповіді		Відповіді		Відповіді		Відповіді	
		Так	Ні	Так	Ні	Так	Ні	Так	Ні
(a)	2	●	○	●	○	○	○	○	○
(b)	3	○	●	○	○	○	●	⊗	●
(c)	Менше, ніж 12	●	○	●	○	○	○	⊗	○
(d)	Позитивне число	●	○	○	○	●	○	●	⊗
(e)	1	○	●	●	○	○	●	⊗	●
Бали:		**10**		**0**		**6**		**6**	

[1]Добре позначеною вважається відповідь, у якій правильною відповіддю є «Так», і ви відмічаєте лише «Так», або правильна відповідь «Ні», і ви відмічаєте лише «Ні». Неправильною відповіддю вважається відповідь, де ви відповідаєте «Так», але ви відзначаєте «Ні», або правильною відповіддю є «Ні», але ви відзначаєте «Так». Всі інші варіанти вважаються питанням без відповіді.

У наступних завданнях визначте, яке твердження вірне, а яке невірне (Так = правдиве, Ні = неправдиве).

1. Розглянемо функцію $f(x) = e^{\sin x}$. Визначте, які твердження про цю функцію є правдивими:

   (a) Функція f є парна.
   (b) Функція f є непарна.
   (c) Функція f є періодична.
   (d) Функція f є зростаюча.
   (e) Функція f є ін'єктівна.

2. Визначте, які з наведених тверджень щодо числа

$$x = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

є правдивими:

   (a) x є більше за 1.
   (b) x є раціональне число.
   (c) $x = \frac{4}{3}$
   (d) $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
   (e) $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. Альжбета, Бланка, Сецілка, Діана, Єва, Філіп, Густав, Хонза та Ігор хочуть вишикуватися на обід. Нехай b — кількість способів, якими вони можуть вишикуватися так, щоб усі дівчата стояли перед усіма хлопцями. Далі позначимо як a кількість варіантів, де Єлизавета теж перша.

Визначте, які з наведених тверджень є правдивими:

   (a) $b > 4a$
   (b) a є другою степінню натурального числа
   (c) $\sqrt{a} > 25$
   (d) $\sqrt{a} > 35$
   (e) $b > 3000$

4. Перші шість членів геометричної прогресії $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ задовольняють наступним двом умовам:

$$a_1 - a_2 + a_3 = 9$$
$$a_4 - a_5 + a_6 = 72$$

Визначте, які з наведених тверджень є правдивими:

   (a) Сума $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ є більша за 180.
   (b) $a_6 > 100$
   (c) $a_5 = 48$
   (d) $a_2 = 2$
   (e) $a_1 + a_6 < 100$

5. Нехай M є множина всіх дійсних розв'язків рівняння

$$\ln(\operatorname{tg} x) = \ln(\operatorname{cotg} x)$$

(ln означає натуральний логарифм). Визначте, які твердження є правдивими:

(a) Якщо $x \in M$, то $-x \in M$.
(b) Якщо $x \in M$, то $(x + \pi/2) \in M$.
(c) Якщо $x \in M$, то $(x + \pi) \in M$.
(d) Якщо $x \in M$, то $3x \in M$.
(e) Якщо $x \in M$, то $5x \in M$.

6. Для числа a позначимо як M_a множину всіх дійсних розв'язків рівняння

$$ax^3 - a^2|x| = 0$$

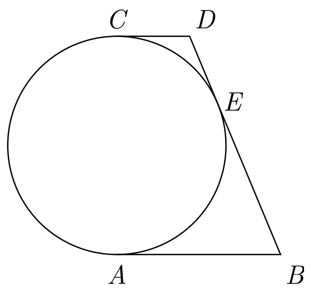
Визначте, які твердження є правдивими:

(a) Існує таке дійсне число a, що M_a містить рівно один елемент.
(b) Існує таке дійсне число a, що M_a містить рівно два елементи.
(c) Існує таке дійсне число a, що M_a містить рівно три елементи.
(d) Існує таке дійсне число a, що M_a містить більше, ніж три елементи.
(e) Для кожного дійсного числа b існує дійсне число a так, що $M_a \cap (-\infty, b\rangle$ містить рівно один елемент.

7. Парабола P1 задається рівнянням $y = 2x^2 - 5x + 2$, парабола P2 — рівнянням $y = 7x^2 + 5x + 7$. Визначте, які твердження є правдивими:

(a) Параболи P1 і P2 перетинаються в двох точках.
(b) Параболи P1 і P2 мають принаймні одну спільну точку.
(c) Парабола P1 перетинає вісь x.
(d) Парабола P2 перетинає вісь x.
(e) Вершина параболи P1 має додатну x-координату.

8. Для певного кола, як показано на малюнку, побудовано дві паралельні дотичні AB і CD (A, C — точки дотику). Довжина прямої AB јдорівнює 9, а довжина прямої CD — 4. Пряма BD дотикається даного кола в точці E.



Визначте, які твердження є правдивими:

(a) Радіус кола більше 6.
(b) За введеними даними не можна визначити радіус кола.
(c) Довжина відрізка BD дорівнює 13.
(d) Площа чотирикутника $ABDC$ дорівнює 39.
(e) Трикутник CDE рівнобедрений.

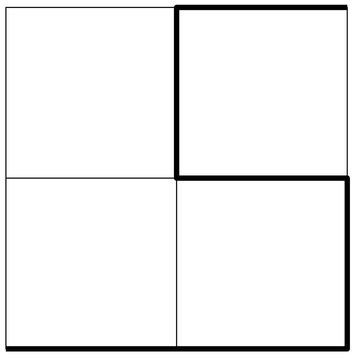
9. У нас є чотири картки, і ми знаємо, що з кожного боку їх написана одна літера, а з іншого — одне ціле число. Карти лежать на столі, і ми бачимо на них:

E	6	K	9

Ми не бачимо нижньої сторони карт. Павло стверджує, що до карток застосовується таке правило: «Якщо на картці написана голосна, то на іншій стороні вона має парне число». Яку з цих чотирьох карток нам потрібно перевернути та перевірити на іншій стороні, щоб перевірити правдивість твердження Павла?

(a) Ми повинні перевернути всі чотири карти.
(b) Ми повинні перевернути будь-які дві картки.
(c) Ми повинні перевернути перші дві картки.
(d) Нам потрібно перевернути обидві картки, де ми бачимо букви.
(e) Ми повинні перевернути першу і останню картку.

10. Давайте розглянемо шляхи в сітці 2×2 від лівого нижнього до правого верхнього кута. Шляхи ведуть по краях квадратів і не можуть проходити через будь-яку точку більше одного разу. Один такий шлях довжиною 6 позначений на малюнку.



Нехай C_k — кількість таких шляхів довжини k. Визначте, які твердження є правдивими:

(a) $C_4 > 5$
(b) $C_5 > 4$
(c) $C_6 > 4$
(d) $C_8 < 4$
(e) $C_8 > 4$

Відповіді

1. Правильні відповіді: c.

2. Досліджуючи x^2, ми легко можемо знайти, що $x = 4/3$.
Правильні відповіді: a, b, c.

3. Прямолінійна комбінаторика нам дає $b = 5! \cdot 4! = 120 \cdot 24$ і $a = 4!^2 = 24^2$. Правильні відповіді: a, b.

4. Прогресія починається з 3, 6, 12, 24, 48, 96.
Правильні відповіді: a, c, e.

5. Розв'язками є всі числа $\pi/4 + 2k\pi$ для цілих k.
Правильні відповіді: c, e.

6. Рівняння легко розв'язати, якщо виділити три випадки: $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$.
Правильні відповіді: b, d, e.

7. Будь-яким зпосібом розв'яжемо квадратне рівняння та знайдемо, що спільна точка параболи є єдиною з координатами $[-1, 9]$, парабола P_1 перетинає вісь x в точках $(5 \pm 9)/4$, тоді як P_2 не перетинає вісь x.

Правильні відповіді: b, c, e.

8. Якщо проведемо висоту з точки D на відрізок AB і скористаємося теоремою Піфагора, то легко знайдемо, що радіус кола дорівнює 6.
Правильні відповіді:c, e.

9. Ми повинні перевірити картку з E (чи є дійсно парне число з іншого боку) і з 9 (чи немає голосної з іншого боку – в цьому випадку твердження є також неправдивим).

Правильні відповіді: e.

10. $C_4 = \binom{4}{2} = 6$ (між чотирма шляхами ми повинні вирішити, які два вгору, а які два вправо),

$C_5 = 0$ (шлях не може мати непарну довжину). В решті решт простий перебір варіантів шляхів нам дає $C_6 = 4$ і $C_8 = 2$.

Правильні відповіді: a, d.

Вступний іспит MFF Карлового університету в Празі

Навчальна програма Математика, бакалаврат

Навчальна програма Інформатика, бакалаврат

2015, варіант B

На кожне з десяти завдань пропонуються наступні п’ять відповідей: a, b, c, d, e. Ваше завдання для кожного завдання та кожної відповіді вирішити і вказати, правильна вона чи неправильна, чи це твердження вірне чи невірне тощо. Час виконання тесту **75 хв.**

Оцінювання. За кожне завдання можна отримати 10 балів. Повну кількість балів за завдання ви отримаєте, якщо для кожної з п’яти запропонованих відповідей правильно[1] позначите, правильна вона чи неправильна. За кожне завдання, в якому ви відзначили одну або кілька неправильних відповідей, ви отримаєте 0 балів, незалежно від кількості правильно позначених відповідей. За завдання, на яких ви не позначили жодної відповіді неправильно, ви отримаєте 2 бали за кожну правильно позначену відповідь (таким чином за п’ять правильно позначених відповідей ви отримаєте 10 балів).

Спосіб позначення та виправлення. Вибрана відповідь позначається заповненим полем відповідного кружечку. Якщо ви вже позначили відповідь і хочете її виправити, ви можете відмінити свій вибір великим хрестиком заповнене поле і заповніть інше поле. Однак ви не можете вибрати поле, яке ви виправили, знову. Відповіді, позначені інакше, вважаються непоміченими. У наступному прикладі зверніть увагу, що останні два стовпці мають однакове значення, різниця лише в виправленнях.

Приклад. Як приклад, наводимо кількість балів, яку ви отримаєте за різні відповіді у завданні.
«Результатом прикладу 1 + 1 є»:

		Відповіді		Відповіді		Відповіді		Відповіді	
		Так	Ні	Так	Ні	Так	Ні	Так	Ні
(a)	2	●	○	●	○	○	○	○	○
(b)	3	○	●	○	○	○	●	~~●~~	●
(c)	Менше, ніж 12	●	○	●	○	○	○	~~●~~	○
(d)	Позитивне число	●	○	○	○	●	○	●	~~●~~
(e)	1	○	●	●	○	○	●	~~●~~	●
Бали:		**10**		**0**		**6**		**6**	

[1]Добре позначеною вважається відповідь, у якій правильною відповіддю є «Так», і ви відмічаєте лише «Так», або правильна відповідь «Ні», і ви відмічаєте лише «Ні». Неправильною відповіддю вважається відповідь, де ви відповідаєте «Так», але ви відзначаєте «Ні», або правильною відповіддю є «Ні», але ви відзначаєте «Так». Всі інші варіанти вважаються питанням без відповіді.

У наступних завданнях визначте, яке твердження вірне, а яке невірне
(Так = правдиве, Ні = неправдиве).

1. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Визначте, які твердження про функцію f є правдивими:

(a) Функція f є парна.
(b) Функція f є непарна.
(c) Функція f є періодична.
(d) Функція f є зростаюча.
(e) Функція f є ін'єктівна.

2. Визначте, які з наведених тверджень щодо числа:

$$x = \sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}$$

є правдивими:

(a) x є більше за 3.
(b) x є раціональне число.
(c) $x = 2\sqrt{3}$
(d) $x^2 = 10$
(e) $x^2 = 6$

3. Опуклий многокутник має рівно 77 діагоналей. Визначте, які твердження щодо його сторін є правдивими.

(a) Кількість його сторін парна.
(b) Кількість його сторін подільна трьом.
(c) Кількість його сторін менше 15.
(d) Кількість його сторін перевищує 15.
(e) Жоден опуклий многокутник не має рівно 77 діагоналей.

4. Певної геометричної прогресії$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ задовольняє $a_5 - a_4 = 576$ та $a_2 - a_1 = 9$. Визначте, які з наведених тверджень є правдивими:

(a) Усі елементи послідовності є цілими числами.
(b) Знаменник є парним цілим числом.
(c) Сума перших п'яти членів послідовності більша за 800.
(d) Сума перших п'яти членів послідовності більша за 1000.
(e) Сума перших п'яти членів послідовності є непарним цілим числом.

5. Нехай M є множина всіх дійсних розв'язків рівняння

$$e^{2\ln\sin x} = 1 - e^{2\ln\cos x}$$

($\ln$ означає натуральний логарифм). Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Якщо $x \in M$,то $-x \in M$.
(b) Існують такі $x, y \in M$, що $x - y = \pi/2$.
(c) Існують такі $x, y \in M$, що $x - y = \pi/4$.
(d) Існує таке $x \in M$, що $1000x \in M$.
(e) Для кожного $x, y \in M$, $|\, x - y| \leq \pi/2$.

6. Для числа a позначимо як M_a множину всіх дійсних розв'язків системи рівнянь

$$|x| + |y| = 1, \qquad xy = a$$

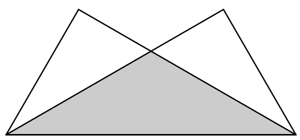
(Отже, M_a містить пари дійсних чисел (x, y), які розв'язують цей набір рівнянь). Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Існує таке дійсне число a, що M_a є порожня.
(b) Існує таке дійсне число a, що M_a містить рівно один елемент.
(c) Існує таке дійсне число a, що M_a містить рівно два елементи.
(d) Існує таке дійсне число a, що M_a містить рівно три елементи.
(e) Для кожного дійсного числа a є правда: якщо $(x, y) \in M_a$, то $(y, x) \in M_a$.

7. Промінь задається формулою з параметром $x = 2 + 2t$ а $y = 1 - 3t$ для $t \geq 0$. Коло задається рівнянням $(x-3)^2 + y^2 = 4$. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Промінь перетинає коло в одній точці.
(b) Промінь перетинає коло в двох точках.
(c) Промінь перетинає вісь x.
(d) Промінь перетинає вісь y.
(e) Коло перетинає вісь y.

8. Два подібних трикутника з внутрішніми кутами $30°$, $60°$ і $90°$, розташовані так, що вони частково перекриваються, а їх гіпотенузи зливаються (див. рисунок). Ці гіпотенузи мають довжину 12.



Нехай S позначає спільну площу обох трикутників. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) $S > 15$
(b) $S = 12\sqrt{3}$
(c) $S = 15\sqrt{3}$
(d) $S > 20$
(e) $S = 24$

9. Нехай f і g — дві функції дійсної змінної, визначені на всьому $\mathbb{R}$. Маємо три нерівності:

(A) $f(x) < g(x)$
(B) $f(x) < g(x) + 10$
(C) $f(x) > g(x)$

Визначте, яке з наступних тверджень є правдивим для кожного можливого вибору f і g.

(a) З трьох нерівностей (A), (B), (C) для кожного значення x виконується принаймні одна.
(b) З трьох нерівностей (A), (B), (C) для кожного значення x виконується тільки одна.
(c) З трьох нерівностей (A), (B), (C) для кожного значення x виконується принаймні дві.
(d) З трьох нерівностей (A), (B), (C) для кожного значення змінної x виконується небільше двох.
(e) Кількість x, що задовольняє нерівність (A), такий же, що й кількість x, що задовольняє нерівність (B).

10. Розглянемо цілі додатні числа, які містять у десятковому записі однакову кількість цифр 1 і 7. Умові задовольняють, наприклад, числа 170, 157, 17, 32, але не 117, 37, 1. Визначте, скільки існує таких чисел, що є менші за 1000.

(a) Ця кількість є непарна.
(b) Ця кількість є подільна чотирма.
(c) Ця кількість є подільна тринадцятьма.
(d) Ця кількість є більша за 300.
(e) Ця кількість є більша за 500.

Відповіді

1. Правильні відповіді: b.

2. Легко змінивши число x^2, знаходимо, що $x^2 = 10$.
Правильні відповіді: a.

3. Це 14-кутник.
Правильні відповіді: a, c.

4. Прогресія починається з 3, 12, 48, 192, 768.
Правильні відповіді: a, b, c, d, e.

5. Розв'язком є всі x, де $\sin x$ і $\cos x$ — додатне число, тобто числа з одного з інтервалів $(0, \pi/2) + 2k\pi$ для цілого числа k.
Правильні відповіді: c, d.

6. Намалювавши правильну картинку, без розрахунків з'ясовуємо, що правильні відповіді: a, c, e.

7. Пряма з тим самим параметричним рівнянням (для реального t) перетинає дане коло в точках з $t_{1,2} = (10 \pm \sqrt{100 + 8 \cdot 13})/26$. Легко дізнатися, що $t_1 > 0 > t_2$.
Правильні відповіді: a, c.

8. Площа $S = 12\sqrt{3}$ (висота навпроти сторони довжиною 12 має довжину $2\sqrt{3}$).
Правильні відповіді: a, b, d.

9. Завжди виконуються (B) або (C). Однак обидва (A) і (B) можуть бути правдивими одночасно. Якщо $f(x) > g(x) + 10$ (що, безумовно, стосується багатьох варіантів вибору f, g та x), то виконується лише одна з даних нерівностей.

Правильні відповіді: a, d.

10. Шукана кількість є $7 + 7 \cdot 8 + 7 \cdot 8^2 + 2 + 2 \cdot (7 + 8 + 8) = 559$.
Правильні відповіді: a, c, d, e.

Вступний іспит MFF Карлового університету в Празі

Навчальна програма Математика, бакалаврат

Навчальна програма Інформатика, бакалаврат

2017, варіант A

На кожне з десяти завдань пропонуються наступні п'ять відповідей: a, b, c, d, e. Ваше завдання для кожного завдання та кожної відповіді вирішити і вказати, правильна вона чи неправильна, чи це твердження вірне чи невірне тощо. Час виконання тесту **75 хв.**

Оцінювання. За кожне завдання можна отримати від 0 до 10 балів. За кожну добре позначену[1] відповідь ви отримуєте +2 бали, за кожну погано позначену відповідь −2 бали, за запитання без відповіді 0 балів. Якщо ви наберете від'ємну кількість балів за завдання за цими правилами, вам буде нараховано 0 балів.

Спосіб позначення та виправлення. Вибрана відповідь позначається заповненим полем відповідного кружечку. Якщо ви вже позначили відповідь і хочете її виправити, ви можете відмінити свій вибір великим хрестиком заповнене поле і заповніть інше поле. Однак ви не можете вибрати поле, яке ви виправили, знову. Відповіді, позначені інакше, вважаються непоміченими. У наступному прикладі зверніть увагу, що останні два стовпці мають однакове значення, різниця лише в виправленнях.

Приклад. Як приклад, наводимо кількість балів, яку ви отримаєте за різні відповіді у завданні.
«Результатом прикладу 1 + 1 є»:

		Відповіді			Відповіді			Відповіді			Відповіді		
		Так	Ні		Так	Ні		Так	Ні		Так	Ні	
(a)	2	●	○	(+2)	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	○	(0)
(b)	3	○	●	(+2)	○	○	(0)	○	●	(+2)	~~●~~	●	(+2)
(c)	Менше, ніж 12	●	○	(+2)	○	●	(−2)	○	○	(0)	~~●~~	○	(0)
(d)	Позитивне число	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	●	(−2)	~~●~~	●	(−2)
(e)	1	○	●	(+2)	●	○	(−2)	○	●	(+2)	~~●~~	●	(+2)
Бали:		**10**			**0**			**2**			**2**		

[1]Добре позначеною вважається відповідь, у якій правильною відповіддю є «Так», і ви відмічаєте лише «Так», або правильна відповідь «Ні», і ви відмічаєте лише «Ні». Неправильною відповіддю вважається відповідь, де ви відповідаєте «Так», але ви відзначаєте «Ні», або правильною відповіддю є «Ні», але ви відзначаєте «Так». Всі інші варіанти вважаються питанням без відповіді.

У наступних завданнях визначте, яке твердження вірне, а яке невірне
(Так = правдиве, Ні = неправдиве).

1. Розглянемо функцію реальної змінної $f(x) = (\sin x)^2 \cos x$. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Функція f є парна.
(b) Функція f є непарна.
(c) Функція f є періодична.
(d) Функція f є зростаюча.
(e) Функція f є ін'єктивна.

2. Позначимо вираз $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) $x^2 > x$
(b) $x^2 < 2$
(c) $x^2 < 3$
(d) $x^3 - 2x > 1$
(e) $x^3 - 2x$ є ціле число.

3. Маємо рівняння $2|x^2 - 2x| + 3x - 3 = 0$ з реальною змінною $x \in \mathbb{R}$.
Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Рівняння має більше двох розв'язків.
(b) Принаймні один розв'язок рівняння є від'ємним числом.
(c) Усі розв'язки рівняння є цілими числами.
(d) Сума всіх розв'язків рівняння є додатним числом.
(e) Різниця між найбільшим і найменшим розв'язками рівняння дорівнює 4.

4. Знайдіть чотири такі числа, щоб перші три утворили три послідовні члени арифметичної послідовності з різницею $d = -3$, а останні три — три послідовні члени геометричної прогресії зі знаменником $q = 1/2$.
Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Завдання має більше одного розв'язку.
(b) Існує розв'язок, де всі чотири числа є цілими числами.
(c) Існує розв'язок, для якого сума всіх чотирьох чисел дорівнює $19{,}5$.
(d) Існує розв'язок, для якого відношення першого і четвертого чисел дорівнює другому числу.
(e) Для кожного розв'язку правдиво, що добуток першого і четвертого чисел менший за добуток другого і третього чисел.

5. Визначте, скільки існує різних прямокутних паралелепіпедів, довжини ребер яких є різними натуральними числами, що дорівнюють не більше 10. Прямокутні паралелепіпеди, що відрізняються лише обертанням у просторі, не вважаються різними. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Ця кількість менша 100.
(b) Ця кількість менша 200.
(c) Ця кількість менша 500.
(d) Ця кількість менша 800.
(e) Ця кількість ділиться на 15.

6. У дійсних числах розв'яжіть систему рівнянь з дійсним параметром p:

$$x - y = 2$$
$$px + y = 4$$

Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Система має рівно один розв'язок для кожного $p \neq -1$.
(b) При $p = 2$ система не має розв'язку.
(c) Для кожного $p > 1$ розв'язок (x, y) задовольняє умовам $x \geq 0$ і $y \leq 0$.
(d) Система має рівно один розв'язок для кожного $p \in \mathbb{R}$.
(e) Для $p = 0$ існує рішення, що задовольняє умовам $x \geq 0$ і $y \geq 0$.

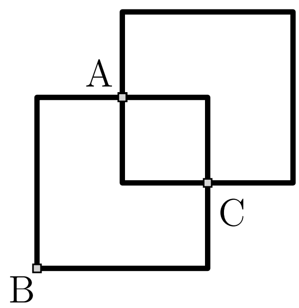
7. Нехай M є множина всіх дійсних розв'язків рівняння

$$\sin|x| - \cos^2 x + 1 = 0.$$

Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Якщо $x \in M$, то $-x \in M$.
(b) Якщо $x \in M$, то $(x + \pi) \in M$.
(c) Якщо $x \in M$, то $(x + 2\pi) \in M$.
(d) M є кінечна.
(e) Якщо $x \in M$, то $5x \in M$.

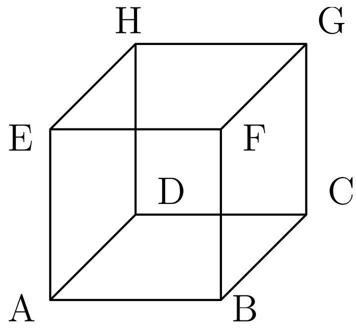
8. На малюнку зображений план міста. Поштовий фургон має проїхати всі вулиці, кожну лише один раз (незалежно від того, в якому напрямку), а потім повернутися до початкової точки. Автомобіль не може повернути в протилежний бік. У точках A, C він може продовжувати їхати по будь-якій вулиці, яку ще не проїжджав.



Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Якщо автомобіль від'їжджає з точки A, у нього є не менше 20 можливих варіантів маршруту.
(b) Якщо автомобіль від'їжджає з пункту A, він має максимум 20 можливих варіантів маршруту.
(c) Якщо автомобіль від'їжджає з точки B, у нього є не менше 20 можливих варіантів маршруту.
(d) Якщо автомобіль від'їжджає з точки B, у нього є максимум 20 можливих варіантів маршруту.
(e) Якщо автомобіль від'їжджає з пункту B, він має максимум 12 можливих варіантів маршруту.

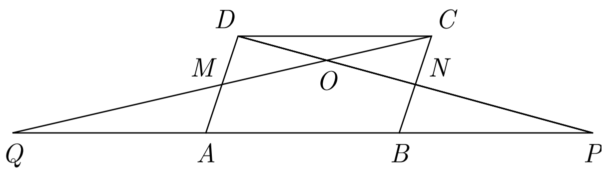
9. Задано куб $ABCDEFGH$ з ребром довжиною 4.



Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Відстань між вершинами A і G дорівнює $4\sqrt{3}$.
(b) Відстань між вершиною A і центром відрізку GH дорівнює 6.
(c) Відстань між вершиною B і центром відрізку AH дорівнює $4\sqrt{2}$.
(d) Відстань між центром відрізку AC і центром відрізку CG дорівнює $3\sqrt{2}$.
(e) Відстань між центром відрізку BG і центром відрізку AF дорівнює $2\sqrt{2}$.

10. Паралелограм *ABCD* має площу 1. Центри сторін *AD* і *BC* позначені *M*, *N*. Прямі *CM* і *DN* перетинаються в точці *O*, а їх перетини з прямою *AB* позначені *Q*, *P* (див. рисунок).



Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Площа п'ятикутника $ABNOM$ je $\frac{3}{4}$.
(b) Площа п'ятикутника $ABNOM$ je $\frac{5}{8}$.
(c) Площа трикутника OPQ je $\frac{9}{8}$
(d) Площа трикутника OPQ дорівнює 8/9.
(e) Площа шестикутника $QPNCDM$ є $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповіді:

1. Правильні відповіді: a, c.

2. Змінивши x^2, ми знаходимо, що $x^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = x + 1$. Звідти легко ($x^3 - 2x = 1$).
   Правильні відповіді: a, c, e.

3. Розв'язком є числа -1, $1/2$. Правильні
   відповіді:: b.

4. Єдиний розв'язок є 9, 6, 3, 3/2. Правильні
   відповіді: c, d, e.

5. Кількість варіантів є: $\binom{10}{3} = 120$.
   Правильні відповіді: b, c, d, e.

6. Додавши обидва рівняння, отримаємо $(p+1)x = 6$. Звідси отримаємо рівно один розв'язок, якщо $p + 1 \neq 0$.
   Правильні відповіді: a, e.

7. Або $x \geq 0$ та $\sin x \in \{0, -1\}$, або $x \leq 0$ і $\sin x \in \{0, 1\}$. Звідси $M = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{N}\} \cup \{-\frac{3}{2}\pi - 2k\pi : k \in \mathbb{N}\}$.
   Правильні відповіді: a, e.

8. Якщо починати з A , кількість варіантів $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, з B тільки $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$. Правильні відповіді: a, d, e.

9. Відстань в частині c дорівнює $2\sqrt{6}$, в частині d дорівнює $2\sqrt{3}$. Правильні відповіді: a, b, e.

10. Використовуючи властивості паралелограма, знаходимо, що трикутник MNO має площу $1/8$. Звідси ми можемо легко знайти все інше.

   Правильні відповіді: b, c.

Вступний іспит MFF Карлового університету в Празі

Навчальна програма Математика, бакалаврат

Навчальна програма Інформатика, бакалаврат

2017, варіант B

На кожне з десяти завдань пропонуються наступні п'ять відповідей: a, b, c, d, e. Ваше завдання для кожного завдання та кожної відповіді вирішити і вказати, правильна вона чи неправильна, чи це твердження вірне чи невірне тощо. Час виконання тесту **75 хв.**

Оцінювання. За кожне завдання можна отримати від 0 до 10 балів. За кожну добре позначену[1] відповідь ви отримуєте +2 бали, за кожну погано позначену відповідь −2 бали, за запитання без відповіді 0 балів. Якщо ви наберете від'ємну кількість балів за завдання за цими правилами, вам буде нараховано 0 балів.

Спосіб позначення та виправлення. Вибрана відповідь позначається заповненим полем відповідного кружечку. Якщо ви вже позначили відповідь і хочете її виправити, ви можете відмінити свій вибір великим хрестиком заповнене поле і заповніть інше поле. Однак ви не можете вибрати поле, яке ви виправили, знову. Відповіді, позначені інакше, вважаються непоміченими. У наступному прикладі зверніть увагу, що останні два стовпці мають однакове значення, різниця лише в виправленнях.

Приклад. Як приклад, наводимо кількість балів, яку ви отримаєте за різні відповіді у завданні.
«Результатом прикладу 1 + 1 є»:

		Відповіді			Відповіді			Відповіді			Відповіді		
		Так	Ні		Так	Ні		Так	Ні		Так	Ні	
(a)	2	●	○	(+2)	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	○	(0)
(b)	3	○	●	(+2)	○	○	(0)	○	●	(+2)	⊗	●	(+2)
(c)	Менше, ніж 12	●	○	(+2)	○	●	(−2)	○	○	(0)	⊗	○	(0)
(d)	Позитивне число	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	●	(−2)	⊗	●	(−2)
(e)	1	○	●	(+2)	●	○	(−2)	○	●	(+2)	⊗	●	(+2)
Бали:		**10**			**0**			**2**			**2**		

[1]Добре позначеною вважається відповідь, у якій правильною відповіддю є «Так», і ви відмічаєте лише «Так», або правильна відповідь «Ні», і ви відмічаєте лише «Ні». Неправильною відповіддю вважається відповідь, де ви відповідаєте «Так», але ви відзначаєте «Ні», або правильною відповіддю є «Ні», але ви відзначаєте «Так». Всі інші варіанти вважаються питанням без відповіді.

У наступних завданнях визначте, яке твердження вірне, а яке невірне
(Так = правдиве, Ні = неправдиве).

1. Розглянемо функцію реальної змінної $f(x) = \sqrt{(1 + x^2)}$. Визначте, які твердження про функцію f є правдивими.

(a) Функція f є парна.
(b) Функція f є непарна.
(c) Функція f є періодична.
(d) Функція f є зростаюча.
(e) Функція f є ін'єктівна.

2. Позначимо x_1, x_2 корені квадратного рівняння $x^2 - 3x + 1 = 0$. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) $x_1 + x_2 > 0$
(b) $x_1 + x_2 > 3$
(c) $x_1 + x_2$ є ціле число.
(d) $x_1 \cdot x_2$ є ціле число.
(e) $x_1 \cdot x_2 > 0$

3. Маємо рівняння $\big|2|x + 1| + 2x - 10\big| + x - 7 = 0$ з реальною змінною x. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Рівняння має більше одного розв'язку.
(b) Принаймні один розв'язок рівняння є від'ємним числом.
(c) Принаймні один розв'язок рівняння не є цілим числом.
(d) Сума всіх розв'язків рівняння є додатним числом.
(e) Добуток всіх розв'язків рівняння є цілим числом.

4. Для деяких двох арифметичних послідовностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ виконується

- $a_1 = 25$,
- $b_1 = 75$,
- $a_{10} + b_{10} = 1900$.

Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Із початкових умов випливає, що $a_{10} = 925$, $b_{10} = 975$.
(b) Числа a_{10}, b_{10} не можуть бути однозначно визначені із початкових умов.
(c) Послідовність $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ є арифметичною послідовністю з різницею 200.
(d) Сума перших десяти членів послідовності $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ більша за 8000.
(e) Суму перших десяти членів послідовності $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ неможливо однозначно визначити із початкових умов.

5. Петро і Павло формують футбольні команди – вони мають між собою розділити 8 гравців, тож вони утворюють дві команди по п'ять осіб. Позначимо z кількість способів, якими це можна зробити. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) $z > 40$
(b) $z > 60$
(c) $z > 80$
(d) z є парне.
(e) z поділяється на 3.

6. У дійсних числах розв'яжіть систему рівнянь з дійсним параметром p:

$$\begin{aligned} px + y &= 1 \\ x + py &= 1 \end{aligned}$$

(a) Існує p, для якого система не має розв'язку.
(b) Існує p, рдля якого система має бескінечну кількість розв'язків.
(c) Для кожного $p \geq 0$ має система єдиний розв'язок (x, y) і $x = y$.
(d) Для $p > 1$ правдиво, що $xy = (p+1)^{-2}$.
(e) При $p = 1$ система не має розв'язку.

7. Нехай M є множина всіх дійсних розв'язків рівняння

$$e^{3\ln(\sin x)} = \sin x$$

($\ln$ означає натуральний логарифм).

(a) Якщо $x \in M$, то $-x \in M$.
(b) Якщо $x \in M$, то $(x + \pi) \in M$.
(c) Якщо $x \in M$, то $(x + 2\pi) \in M$.
(d) Якщо $x \in M$, то $2x \in M$.
(e) Якщо $x \in M$, то $5x \in M$.

8. Трикутник ABC задано його вершинами $A[-3; -2]$, $B[1; 1]$, $C[0; -6]$. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Трикутник ABC рівносторонній.
(b) Трикутник ABC рівнобедрений.
(c) Трикутник ABC прямокутний.
(d) Центр ваги трикутника ABC має координати $[-1; -2]$.
(e) Сторона AB має довжину 5.

9. Розглянемо чотиригранник ABCD; трикутна грань ABC є рівностороннім трикутником із довжиною сторони 6, а всі інші ребра чотириграннику мають довжину √15. Визначте, які твердження є правдивими.
(a) Грань ABC має площу 2√3.
(b) Грань ABC має площу 3√3.
(c) Висота чотириграннику, що проходить через вершину D, більша за 1,5.
(d) Об'єм чотириграннику дорівнює 27/4.
(e) Об'єм чотириграннику дорівнює 9.

10. У трикутнику ABC кут при вершині C дорівнює $\gamma = 140\,^\circ$. Розміри кутів при вершинах A, B позначимо α, β. На відрізку AB вибрана точка D (відмінна від A, B), а на відрізку AC— точка E (відмінна від A, C). Ми знаємо, що відрізки AE, ED, DC, CB мають однакову довжину. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) $\alpha = \beta$
(b) Розмір кутів α, β не можна однозначно визначити з умов задачі.
(c) Трикутник CDE прямокутний.
(d) $\beta - \alpha = 20\,^\circ$
(e) $\beta = 3\alpha$

Відповіді:

1. Правильні відповіді:: a.

2. Розв'язавши рівняння прямо або з формул Вієта, ми легко знайдемо $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 \cdot x_2 = 1$. Правильні відповіді: a, c, d, e.

3.
Правильні відповіді: a, b, c, e.

4.
Правильні відповіді: b, c, d.

5. Кількість варіантів є: $\binom{8}{4} = 70$.
Правильні відповіді: a, b, d.

6.
Правильні відповіді: a, b, d.

7. Має бути $\sin x = 1$. Отже, $M = \{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
Правильні відповіді: c, e.

8.
Правильні відповіді: b, c, e.

9.
Правильні відповіді: c, e.

10.
Правильні відповіді: d, e.

Вступний іспит MFF Карлового університету в Празі

Навчальна програма Математика, бакалаврат

Навчальна програма Інформатика, бакалаврат

2018, варіант A

На кожне з десяти завдань пропонуються наступні п'ять відповідей: a, b, c, d, e. Ваше завдання для кожного завдання та кожної відповіді вирішити і вказати, правильна вона чи неправильна, чи це твердження вірне чи невірне тощо. Час виконання тесту **75 хв.**

Оцінювання. За кожне завдання можна отримати від 0 до 10 балів. За кожну добре позначену[1] відповідь ви отримуєте +2 бали, за кожну погано позначену відповідь −2 бали, за запитання без відповіді 0 балів. Якщо ви наберете від'ємну кількість балів за завдання за цими правилами, вам буде нараховано 0 балів.

Спосіб позначення та виправлення. Вибрана відповідь позначається заповненим полем відповідного кружечку. Якщо ви вже позначили відповідь і хочете її виправити, ви можете відмінити свій вибір великим хрестиком заповнене поле і заповніть інше поле. Однак ви не можете вибрати поле, яке ви виправили, знову. Відповіді, позначені інакше, вважаються непоміченими. У наступному прикладі зверніть увагу, що останні два стовпці мають однакове значення, різниця лише в виправленнях.

Приклад. Як приклад, наводимо кількість балів, яку ви отримаєте за різні відповіді у завданні.
«Результатом прикладу 1 + 1 є»:

		Відповіді			Відповіді			Відповіді			Відповіді		
		Так	Ні		Так	Ні		Так	Ні		Так	Ні	
(a)	2	●	○	(+2)	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	○	(0)
(b)	3	○	●	(+2)	○	○	(0)	○	●	(+2)	~~●~~	●	(+2)
(c)	Менше, ніж 12	●	○	(+2)	○	●	(−2)	○	○	(0)	~~●~~	○	(0)
(d)	Позитивне число	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	●	(−2)	~~●~~	●	(−2)
(e)	1	○	●	(+2)	●	○	(−2)	○	●	(+2)	~~●~~	●	(+2)
Бали:		**10**			**0**			**2**			**2**		

[1] Добре позначеною вважається відповідь, у якій правильною відповіддю є «Так», і ви відмічаєте лише «Так», або правильна відповідь «Ні», і ви відмічаєте лише «Ні». Неправильною відповіддю вважається відповідь, де ви відповідаєте «Так», але ви відзначаєте «Ні», або правильною відповіддю є «Ні», але ви відзначаєте «Так». Всі інші варіанти вважаються питанням без відповіді.

У наступних завданнях визначте, яке твердження вірне, а яке невірне
(Так = правдиве, Ні = неправдиве).

1. Розглянемо функцію $f(x) = x|x|$. Визначте, які твердження про функцію f є правдивими.

   (a) Функція f є парна.
   (b) Функція f є непарна.
   (c) Функція f є періодична.
   (d) Функція f є зростаюча.
   (e) Функція f є ін'єктівна.

2. Розв'яжіть рівняння $\frac{kx+1}{x-2} = \frac{kx-1}{x+2}$ з параметром $k \in \mathbb{R}$. Визначте, які твердження є правдивими.

   (a) Рівняння має один корінь для кожного $k \in \mathbb{R}$.
   (b) $x = 2$ є коренем рівняння для $k = 1/2$.
   (c) Для $k = -1/2$ задовольняє рівняння кожне $x \neq 2$.
   (d) Рівняння має єдиний корінь $x = 0$ для $k = -1/2$.
   (e) Рівняння має єдиний корінь $x = 0$ для $k \neq -1/2$.

3. Маємо квадрат зі стороною довжини a. У нього вписаний квадрат так, що його вершини лежать посередині сторін даного квадрата; в отриманий квадрат знову вписують квадрат з вершинами на середині сторін попереднього квадрата; тощо. Процедура постійно повторюється. Визначте, які твердження є правдивими.

   (a) Сума площ всіх отриманих квадратів дорівнює $4a^2$.
   (b) Периметр 4-го квадрата дорівнює четвертини кола 2-го квадрата.
   (c) Сума периметрів усіх утворених таким чином квадратів більша за $8a$.
   (d) Сума периметрів усіх утворених таким чином квадратів більша за $12a$.
   (e) Площа 5-го квадрата дорівнює половині площі 4-го квадрата.

4. Нехай M j є множина всіх дійсних розв'язків рівняння

$$\sin\left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$$

Визначте, які твердження є правдивими.

   (a) Якщо $x \in M$, то $-x \in M$.
   (b) Якщо $x \in M$, то $(x + \pi) \in M$.
   (c) Якщо $x \in M$, то $(x + 2\pi) \in M$.
   (d) Якщо $x \in M$, то $2x \in M$.
   (e) Якщо $x \in M$, то $9x \in M$.

5. Нехай $x = \log_5 \frac{1}{25} - (\log_{\frac{1}{3}} 9)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 4^2$. Визначте, які твердження є правдивими.

   (a) $x = -10$
   (b) $x \geq -2$
   (c) $x = 2$
   (d) $x \leq 6$
   (e) $x = 10$

6. Є точки $K[2;\ 5]$ і $L[6;\ 2]$. Визначте координати точок M і N так, щоб чотирикутник $KLMN$ був прямокутником і щоб $|KL| = 3|LM|$. Вершини чотирикутника позначені проти напрямку руху стрілок годинника. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Точка M має координати $[7;\ \frac{11}{3}]$.

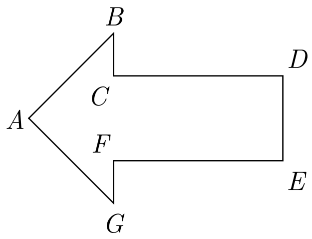
(b) Точка N має координати $[3;\ \frac{22}{3}]$.

(c) Точка N має координати $[3;\ \frac{19}{3}]$.

(d) $|LM| = \frac{5}{3}$

(e) Площа прямокутника $KLMN$ дорівнює $\frac{25}{3}$

7. Нехай $ABCDEFG$ є семикутник на площині, де кути при вершинах A, C, D, E, F прямі і $|BC| = |FG| = 5$ cm, $|CD| = |EF| = 20$ cm, $|DE| = 10$ cm, $|AB| = |AG|$ (див. рисунок).



Визначте, які твердження є правдивими.

(a) $|AB| = 10\sqrt{2}$ cm.

(b) Периметр семикутника дорівнює $(70 + 20\sqrt{2})$ cm.

(c) Площа трикутника ABG дорівнює 100 cm^2.

(d) Площа семикутнику дорівнює $(10\sqrt{2} + 200)$ cm^2.

(e) Відстань між точками A, F дорівнює $5\sqrt{5}$cm.

8. Нехай X позначає кількість різних натуральних чотирицифрових чисел з різними цифрами, які можуть складатися з цифр $0, 1, 2, 4, 6, 7$. Нехай Y позначає кількість парних таких чисел. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) $X > 300$

(b) $Y > 200$

(c) $Y = 2X/3$

(d) X ділиться на десять.

(e) Y ділиться на три.

9. Розглянемо многочлен $(1 + 2x - x^2)^{10}$. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Степінь многочлену є 12.

(b) Степінь многочлену є 20.

(c) Многочлен має хоча б один від'ємний корінь.

(d) Многочлен не має цілого кореня.

(e) Сума кожного з двох різних коренів є додатна.

10. Гравець кидає гральний кубик кілька разів і підраховує набрані очки; гра закінчується, коли сума набраних очок більше або дорівнює 4. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Імовірність того, що гравець закінчить гру з сумою 5, є більша за ймовірність того, що він закінчить гру з сумою 6.

(b) Імовірність того, що гравець закінчить гру з сумою 6, є більша за ймовірність того, що він закінчить гру з сумою 7.

(c) Імовірність того, що гра закінчиться з сумою не більше 9, дорівнює одиниці.

(d) Імовірність того, що гра закінчиться одразу після двох кидків, становить принаймні 1/3.

(e) Імовірність того, що гра закінчиться після більше ніж двох кидків становить не менше 1/3.

Вступний іспит MFF Карлового університету в Празі

Навчальна програма Математика, бакалаврат

Навчальна програма Інформатика, бакалаврат

2018, варіант B

На кожне з десяти завдань пропонуються наступні п’ять відповідей: a, b, c, d, e. Ваше завдання для кожного завдання та кожної відповіді вирішити і вказати, правильна вона чи неправильна, чи це твердження вірне чи невірне тощо. Час виконання тесту **75 хв.**

Оцінювання. За кожне завдання можна отримати від 0 до 10 балів. За кожну добре позначену[1] відповідь ви отримуєте +2 бали, за кожну погано позначену відповідь −2 бали, за запитання без відповіді 0 балів. Якщо ви наберете від’ємну кількість балів за завдання за цими правилами, вам буде нараховано 0 балів.

Спосіб позначення та виправлення. Вибрана відповідь позначається заповненим полем відповідного кружечку. Якщо ви вже позначили відповідь і хочете її виправити, ви можете відмінити свій вибір великим хрестиком заповнене поле і заповніть інше поле. Однак ви не можете вибрати поле, яке ви виправили, знову. Відповіді, позначені інакше, вважаються непоміченими. У наступному прикладі зверніть увагу, що останні два стовпці мають однакове значення, різниця лише в виправленнях.

Приклад. Як приклад, наводимо кількість балів, яку ви отримаєте за різні відповіді у завданні.
«Результатом прикладу 1 + 1 є»:

		Відповіді			Відповіді			Відповіді			Відповіді		
		Так	Ні		Так	Ні		Так	Ні		Так	Ні	
(a)	2	●	○	(+2)	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	○	(0)
(b)	3	○	●	(+2)	○	○	(0)	○	●	(+2)	~~●~~	●	(+2)
(c)	Менше, ніж 12	●	○	(+2)	○	●	(−2)	○	○	(0)	~~●~~	○	(0)
(d)	Позитивне число	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	●	(−2)	~~●~~	●	(−2)
(e)	1	○	●	(+2)	●	○	(−2)	○	●	(+2)	~~●~~	●	(+2)
Бали:		**10**			**0**			**2**			**2**		

[1]Добре позначеною вважається відповідь, у якій правильною відповіддю є «Так», і ви відмічаєте лише «Так», або правильна відповідь «Ні», і ви відмічаєте лише «Ні». Неправильною відповіддю вважається відповідь, де ви відповідаєте «Так», але ви відзначаєте «Ні», або правильною відповіддю є «Ні», але ви відзначаєте «Так». Всі інші варіанти вважаються питанням без відповіді.

У наступних завданнях визначте, яке твердження вірне, а яке невірне (Так = правдиве, Ні = неправдиве).

1. Розглянемо функцію $f(x) = \sin(x^2)$. Визначте, які твердження є правдивими.
   (a) Функція f є парна.
   (b) Функція f є непарна.
   (c) Функція f є періодична.
   (d) Функція f є зростаюча.
   (e) Функція f є ін'єктівна.

2. Розв'яжіть рівняння $px - 2/(p^2) = \frac{1}{p}(4x+1)$ з дійсним параметром.
Визначте, які твердження є правдивими.
(a) Для $p = 2$ рівняння не має кореня.
(b) Для $p \neq 0$ і $p \neq -2$ рівняння має корінь $x = \frac{1}{p(p+2)}$.
(c) Рівняння має єдиний корінь $x = \frac{1}{p(p-2)}$ для кожного $p \in \mathbb{R}$.
(d) Для $|p| = 2$ рівняння не має розв'язку.
(e) Існує $p \in \mathbb{R}$, для якого кожне $x \in \mathbb{R}$ є розв'язком рівняння.

3. Над висотою рівностороннього трикутника зі стороною довжини *a* побудовано рівносторонній трикутник (висота початкового трикутника є його стороною). Над висотою нового рівностороннього трикутника будується рівносторонній трикутник; тощо. Процедура постійно повторюється. Визначте, які твердження є правдивими.
(a) Площі трикутників утворють арифметичну послідовність.
(b) Сума площ усіх трикутників є менша за $2a^2$.
(c) Для периметра *n*-го трикутника O_n виконується, $O_n = \frac{3}{4}O_{n-2}$.
(d) Сума площ всіх трикутників є менша за $1{,}5a^2$.
(e) Периметр 5-го трикутника дорівнює половині периметру 1-го трикутника.

4. Нехай M є множина всіх дійсних розв'язків рівняння

$$\ln((\sin x)^2 + \sin x - 1) = \ln(\sin x)$$

($\ln$ означає натуральний логарифм). Визначте, які твердження є правдивими.
(a) Якщо $x \in M$, то $-x \in M$.
(b) Якщо $x \in M$, то $(x + \pi) \in M$.
(c) Якщо $x \in M$, то $(x + 2\pi) \in M$.
(d) Якщо $x \in M$, то $2x \in M$.
(e) Якщо $x \in M$, то $5x \in M$.

5. Визначте всі числа $x, y \in R$ так, щоб вони були розв'язком системи рівнянь

$$2 \cdot 2^{x-y} + 2^{x+y-1} = 20$$

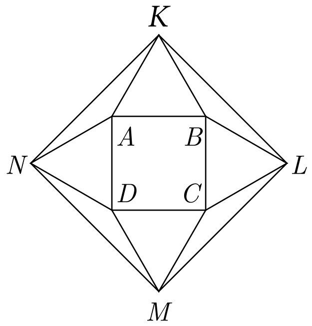
$$10 \cdot 2^{x-y-1} - 2^{x+y} = -22$$

Визначте, які твердження є правдивими.
(a) Система має більше ніж один розв'язок.
(b) Для кожного розв'язку виконується $x > y$.
(c) $x = 3$
(d) Існує рішення для якого $y < 0$.
(e) $y = 4$

6. Є точки $A[4;1]$, $S[6;2]$. Визначте координати точок B, C, D так, щоб чотирикутник $ABCD$ був квадратом. Точка S є центром квадрата. Вершини в квадраті позначені проти напрямку руху стрілок годинника. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Точка B має координати $[7;0]$.
(b) Точка C має координати $[8;3]$.
(c) Точка D має координати $[5;4]$.
(d) $|BD| = 2\sqrt{5}$
(e) Площа квадрата $ABCD$ є 10.

7. На площині побудовано квадрат *ABCD* з площею 16 cm^2. Над його сторонами побудовані рівносторонні трикутники, решта вершин яких позначаються *K, L, M, N* (див. рисунок).



Визначте, які твердження є правдивими.

(a) $|KM| = (4 + 4\sqrt{3})$ cm.
(b) $|KL| = (2\sqrt{2} + 2\sqrt{6})$ cm.
(c) Площа квадрата $KLMN$ є $(32 + 32\sqrt{3})$ cm^2.
(d) Периметр квадрата $KLMN$ є 32cm.
(e) Відстань між точками K, D дорівнює $4\sqrt{(2 + \sqrt{3})}$ см.

8. Позначимо Z – кількість різних натуральних чотирицифрових чисел, які діляться на чотири і можуть складатися з цифр 1, 5, 6, 8, 9. Цифри можуть повторюватися в числі. Нехай T — кількість чисел, які складаються з різних цифр. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) $Z > 100$
(b) $T > 50$
(c) $T < Z/5$
(d) Z є парне.
(e) T ділиться на п’ять.

9. Ми знаємо, що про невідоме ціле число *x* значення виразу $\frac{x^3-4x^2-4x+6}{x-5}$ є ціле. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Існує лише одне таке *x*.
(b) Існує безкінечна кількість таких *x*.
(c) Для кожного x цією властивістю значення виразу є додатним числом.
(d) Для кожного *x* з цією властивістю $|x|$ ділиться на 11.
(e) Для кожного *x* з цією властивістю $|x|$ є парне.

10. Нехай M є множина всіх послідовностей одиниць і нулів, яка складається з 4 нулів і 6 одиниць. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) M містить більше 250 елементів.

(b) Кількість елементів M ділиться на три.

(c) M містить однакову кількість послідовностей, які починаються з нуля, і послідовностей, які починаються з одиниці.

(d) Різних восьмисимвольних послідовностей, отриманих шляхом видалення останніх двох символів з послідовностей із множини M є більше 150.

(e) M містить менше 25 послідовностей, де на перших чотирьох місцях три нулі і одна одиниця (у будь-якому порядку).

варіант А

1 H T H T T

2 H H H H T

3 H H T T T

4 H H T H T

5 T H H T H

6 H H T T T

7 T H T H T

8 H T H T T

9 H T T T T

10 H T T T T

варіант В

1 T H H H H

2 T H H H T

3 H T T H H

4 H H T H T

5 H T T H H

6 T T T T T

7 T T H H T

8 T H T H H

9 H H T H T

10 H T H T T

Вступний іспит MFF Карлового університету в Празі

Навчальна програма Математика, бакалаврат

Навчальна програма Інформатика, бакалаврат

2019, варіант A

На кожне з десяти завдань пропонуються наступні п’ять відповідей: a, b, c, d, e. Ваше завдання для кожного завдання та кожної відповіді вирішити і вказати, правильна вона чи неправильна, чи це твердження вірне чи невірне тощо. Час виконання тесту **75 хв.**

Оцінювання. За кожне завдання можна отримати від 0 до 10 балів. За кожну добре позначену[1] відповідь ви отримуєте +2 бали, за кожну погано позначену відповідь −2 бали, за запитання без відповіді 0 балів. Якщо ви наберете від’ємну кількість балів за завдання за цими правилами, вам буде нараховано 0 балів.

Спосіб позначення та виправлення. Вибрана відповідь позначається заповненим полем відповідного кружечку. Якщо ви вже позначили відповідь і хочете її виправити, ви можете відмінити свій вибір великим хрестиком заповнене поле і заповніть інше поле. Однак ви не можете вибрати поле, яке ви виправили, знову. Відповіді, позначені інакше, вважаються непоміченими. У наступному прикладі зверніть увагу, що останні два стовпці мають однакове значення, різниця лише в виправленнях.

Приклад. Як приклад, наводимо кількість балів, яку ви отримаєте за різні відповіді у завданні.
«Результатом прикладу 1 + 1 є»:

		Відповіді			Відповіді			Відповіді			Відповіді		
		Так	Ні		Так	Ні		Так	Ні		Так	Ні	
(a)	2	●	○	(+2)	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	○	(0)
(b)	3	○	●	(+2)	○	○	(0)	○	●	(+2)	~~●~~	●	(+2)
(c)	Менше, ніж 12	●	○	(+2)	○	●	(−2)	○	○	(0)	~~●~~	○	(0)
(d)	Позитивне число	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	●	(−2)	~~●~~	●	(−2)
(e)	1	○	●	(+2)	●	○	(−2)	○	●	(+2)	~~●~~	●	(+2)
Бали:		**10**			**0**			**2**			**2**		

[1] Добре позначеною вважається відповідь, у якій правильною відповіддю є «Так», і ви відмічаєте лише «Так», або правильна відповідь «Ні», і ви відмічаєте лише «Ні». Неправильною відповіддю вважається відповідь, де ви відповідаєте «Так», але ви відзначаєте «Ні», або правильною відповіддю є «Ні», але ви відзначаєте «Так». Всі інші варіанти вважаються питанням без відповіді.

У наступних завданнях визначте, яке твердження вірне, а яке невірне
(Так = правдиве, Ні = неправдиве).

1. Розглянемо функцію $f(x) = e^{-x} - e^{x}$. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Функція f є парна.
(b) Функція f є непарна.
(c) Функція f є періодична.
(d) Функція f є зростаюча.
(e) Функція f є ін'єктівна.

2. У рівнобедреному трикутнику ABC сторона $a = |BC| = 8$ cm і кут $\alpha = \sphericalangle CAB = 120°$. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Сторона $b = 8/\sqrt{3}$ cm.
(b) Висота $v_a = 2\sqrt{3}$ cm
(c) Висота $v_c = 4$ cm
(d) Площа трикутника більше 8 cm^2.
(e) Центр описаного кола лежить поза межами трикутника.

3. Нехай M_a є множина всіх дійсних розв'язків рівняння

$$x^2 + a|x| + 1 = 0$$

де a є дійсне число. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Існує таке дійсне число а, що M_a є пуста.
(b) Існує таке дійсне число а, що M_a містить рівно один елемент.
(c) Існує таке дійсне число а, що M_a містить рівно два елементи.
(d) Існує таке дійсне число а, що M_a містить рівно три елементи.
(e) Існує таке дійсне число а, що M_a містить більше, ніж три елементи.

4. Визначте, для яких множин A і B справедливе таке твердження: Для кожного елемента a із множини A і для кожного елементу b із множини B правдиво, що якщо $a < b$, то існує елемент c із множини B, який задовольняє $a < c < b$.

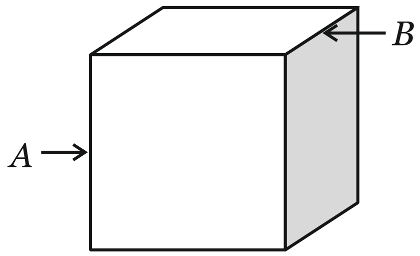
(a) $A = (-1, 0), B = (0, 1)$
(b) $A = [-1, 0], B = [0, 1]$
(c) $A = (0, 1), B = (-1, 0)$
(d) $A = (0, 1),\ B = [0, 1]$
(e) $A = [0, 1],\ B = [0, 1]$

5. Рівносторонній трикутник *ABC* вписано квадрат *DEFG* із довжиною сторони *d* так, що сторона *DE* зливається зі стороною c трикутника, а вершини *F* і *G* лежать на сторонах *a* і *b*. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Довжина сторони трикутник *ABC* дорівнює $(\sqrt{3} + 1)d$.
(b) Довжина відрізку AG je $2/\sqrt{3}\, d$.
(c) Трикутник ABC має висоту $(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)d$.
(d) Площа трикутнику ABC є $(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2})d^2$.
(e) Площа трикутника CGF є $\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$.

6. Ребро куба має довжину 10 cm, точки A, B є центрами ребер цього куба, як показано на рисунку. Визначте, які твердження о довжині відрізку *AB* є правдивими.

(a) $|AB| = 5\sqrt{3}$ cm
(b) $|AB| = 5\sqrt{5}$ cm
(c) $|AB| = 5\sqrt{6}$ cm
(d) $|AB| = 10\sqrt{3}$ cm
(e) $|AB| > 12$ cm



7. Спіраль складається з четвертин кіл. Радіус першої четвертини дорівнює 100 cm. Радіус кожної наступної четвертини кола на 10 % менший за радіус попередньої четвертини кола. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Радіус 3-ї четвертини кола дорівнює 80 cm.
(b) Сума довжин 2-ї та 4-ї четвертини кіл є більше за 240 cm.
(c) Співвідношення довжин 2-ї та 5-ї половини кіл дорівнює 1,5.
(d) Різниця довжин 1-ї та 3-ї четвертини кіл є менша за 27 cm.
(e) Загальна довжина спіралі є більше за 500π cm.

8. Кидаємо чорний, білий і зелений кубики. Позначимо такі випадкові явища:

A: на чорному кубику впаде більше число, ніж на білому

B: на принаймні двох (довільних) кубиках впаде однакове число

C: сума чисел на чорному і білому кубику буде парною

Які твердження є правдивими о ймовірностях цих випадкових явищ?

(a) $P(A) < P(B)$
(b) $P(A) < P(C)$
(c) $P(C) < P(B)$
(d) Ймовірність лише одного з цих явищ є більша за 1/2.
(e) Ймовірність кожного з цих явищ становить не більше 1/2.

9. $N = 21609 = 3^2 \cdot 7^4$. Визначте, які твердження є правдивими. (Під дільником числа n ми розуміємо, натуральне число, яке ділить n без остачі. Числа 1 і n також є дільниками.)

(a) Кількість дільників N є парна.
(b) N має більше десяти дільників.
(c) Число 120 має більше дільників, ніж N.
(d) Найменше натуральне число, яке має таку саму кількість дільників, що й N, є менше 120.
(e) Натуральних чисел, що є менші за N і мають таку саму кількість дільників, що й N, є найбільше десять.

10. Нехай M є множина всіх дійсних розв'язків рівняння

$$2\sin\sqrt{x^2} - (\cos x)^2 + 2 = 0$$

Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Якщо $x \in M$, то $-x \in M$.
(b) Якщо $x \in M$, то $(x + \pi) \in M$.
(c) Якщо $x \in M$, то $(x + 2\pi) \in M$.
(d) Якщо $x \in M$, то $2x \in M$.
(e) Якщо $x \in M$, то $5x \in M$.

Відповіді:

1. Правильні відповіді: НТННТ
2. Правильні відповіді: ТНТТТ
3. Правильні відповіді: ТНТНТ
4. Правильні відповіді: ТНТТТ
5. Правильні відповіді: НТТНТ
6. Правильні відповіді: ННТНТ
7. Правильні відповіді: НТНТТ
8. Правильні відповіді: ТТННТ
9. Правильні відповіді: НТТНН
10. Правильні відповіді: ТНННТ

Вступний іспит MFF Карлового університету в Празі

Навчальна програма Математика, бакалаврат

Навчальна програма Інформатика, бакалаврат

2019, варіант B

На кожне з десяти завдань пропонуються наступні п'ять відповідей: a, b, c, d, e. Ваше завдання для кожного завдання та кожної відповіді вирішити і вказати, правильна вона чи неправильна, чи це твердження вірне чи невірне тощо. Час виконання тесту **75 хв.**

Оцінювання. За кожне завдання можна отримати від 0 до 10 балів. За кожну добре позначену[1] відповідь ви отримуєте +2 бали, за кожну погано позначену відповідь −2 бали, за запитання без відповіді 0 балів. Якщо ви наберете від'ємну кількість балів за завдання за цими правилами, вам буде нараховано 0 балів.

Спосіб позначення та виправлення. Вибрана відповідь позначається заповненим полем відповідного кружечку. Якщо ви вже позначили відповідь і хочете її виправити, ви можете відмінити свій вибір великим хрестиком заповнене поле і заповніть інше поле. Однак ви не можете вибрати поле, яке ви виправили, знову. Відповіді, позначені інакше, вважаються непоміченими. У наступному прикладі зверніть увагу, що останні два стовпці мають однакове значення, різниця лише в виправленнях.

Приклад. Як приклад, наводимо кількість балів, яку ви отримаєте за різні відповіді у завданні.
«Результатом прикладу 1 + 1 є»:

		Відповіді			Відповіді			Відповіді			Відповіді		
		Так	Ні		Так	Ні		Так	Ні		Так	Ні	
(a)	2	●	○	(+2)	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	○	(0)
(b)	3	○	●	(+2)	○	○	(0)	○	●	(+2)	~~●~~	●	(+2)
(c)	Менше, ніж 12	●	○	(+2)	○	●	(−2)	○	○	(0)	~~●~~	○	(0)
(d)	Позитивне число	●	○	(+2)	○	○	(0)	○	●	(−2)	~~●~~	●	(−2)
(e)	1	○	●	(+2)	●	○	(−2)	○	●	(+2)	~~●~~	●	(+2)
Бали:		**10**			**0**			**2**			**2**		

[1]Добре позначеною вважається відповідь, у якій правильною відповіддю є «Так», і ви відмічаєте лише «Так», або правильна відповідь «Ні», і ви відмічаєте лише «Ні». Неправильною відповіддю вважається відповідь, де ви відповідаєте «Так», але ви відзначаєте «Ні», або правильною відповіддю є «Ні», але ви відзначаєте «Так». Всі інші варіанти вважаються питанням без відповіді.

У наступних завданнях визначте, яке твердження вірне, а яке невірне
(Так = правдиве, Ні = неправдиве).

1. Розглянемо функцію $f(x) = |x| + 2x - 1$. Визначте, які твердження є правдивими.
   (a) Функція f є парна.
   (b) Функція f є непарна.
   (c) Функція f є періодична.
   (d) Функція f є зростаюча.
   (e) Функція f є ін'єктівна.

2. У прямокутнику $ABCD$ довжина сторони $a = |AB| = 8$ cm і діагональ $|AC| = 12$ cm. Центр сторони b позначимо S_b а центр сторони c позначимо S_c. Визначте, які твердження є правдивими.

   (a) Сторона b має довжину $2\sqrt{15}$ cm.
   (b) Довжина відрізку S_bS_c є 6 cm.
   (c) Довжина відрізку AS_b є $\sqrt{84}$ cm.
   (d) Трикутник AS_bS_c має площу 24 cm^2.
   (e) Трикутник AS_bS_c є рівнобедрений.

3. Нехай M_a є множина всіх дійсних розв'язків рівняння

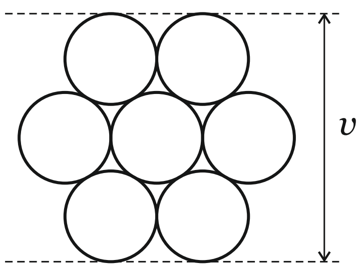
$$|x|^3 + ax^2 = 0$$

де a є дійсне число. Визначте, які твердження є правдивими.
   (a) Існує таке дійсне число а, що M_a є пуста.
   (b) Існує таке дійсне число а, що M_a містить рівно один елемент.
   (c) Існує таке дійсне число а, що M_a містить рівно два елементи.
   (d) Існує таке дійсне число а, що M_a містить рівно три елементи.
   (e) Існує таке дійсне число а, що M_a містить більше, ніж три елементи.

4. Розглянемо такі твердження про множину натуральних чисел M
   (A) M не містить жодного непарного числа.
   (B) M містить усі натуральні парні числа.
   (C) M містить усі прості числа.
   (D) M містить принаймні одне непарне число.

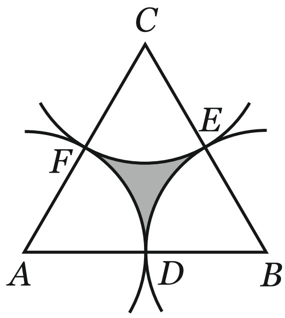
   Які з наведених тверджень правдиві для будь-якого M?
   (a) Якщо (A) правдиве, то (B) правдиве.
   (b) Якщо (C) правдиве, то (D) правдиве.
   (c) Якщо (B) правдиве, то (C) неправдиве.
   (d) Правдиве (A) чи правдиве (D).
   (e) Неправдиве (B) чи неправдиве (C).

5. Сім однаково великих кіл радіусом $r = 1$ cm розміщено, як показано на рисунку (суміжні кола стикаються). Позначимо висоту всієї фігури символом v (див. рисунок). Визначте, які твердження є правдивими.
   (a) $v > 5$ cm
   (b) $v = 3\sqrt{3}$ cm
   (c) $v = (2 + \pi)$ cm
   (d) $v = (1 + 3\sqrt{2})$ cm
   (e) $v = (2 + 2\sqrt{3})$ cm



6. Сторони рівностороннього трикутника ABC мають довжину 10 cm. Позначимо центри його сторін AB, BC, CA по порядку D, E, F. Побудуємо три кола з центрами в точках A, B, C і радіусом 5 cm. Площа, визначена в трикутнику дугами кіл DE, EF, FD, позначається P. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Площа P є менша 6 cm^2.
(b) Площа P є менша 10 cm^2.
(c) Площа P є менша 16 cm^2.
(d) Площа P є рівно в десять разів менша за площу трикутника ABC.
(e) Площу P не можна однозначно визначити з умови завдання.



7. Спіраль складається з половин кіл. Радіус першої половини дорівнює 100 cm. Радіус кожної наступної половини кола на 20 % менший за радіус попередньої половини кола. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Радіус 3-ї половини кола дорівнює 60 cm.
(b) Сума довжин 2-ї та 4-ї половини кіл є $\frac{656\pi}{5}$ cm.
(c) Співвідношення довжин 5-ї та 3-ї половини кіл дорівнює 0,64.
(d) Різниця довжин 1-ї та 3-ї четвертина кіл є менша за 100 cm.
(e) Загальна довжина спіралі є більша за 1500 cm.

8. Позначимо як X множину шестизначних чисел, які містять кожну з цифр 1, 2, 3, 4, 5 і 6 по одному разу. Нехай Y і Z — підмножини множини X. Множина Y — це множина чисел, в яких парні цифри впорядковані від найменших до найбільших. Множина Z — це множина чисел, перші три цифри яких є парними. Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Множина Y має більше елементів, ніж множина Z.
(b) В перетині Y і Z є лише один елемент.
(c) Множина X містить у двадцять разів більше елементів, ніж множина Z.
(d) Множина Y містить не більше 32 елементів.
(e) Кількість елементів у множинах Y і Z діляться на п'ять.

9. Розглянемо всі натуральні числа, другим за величиною дільником яких є число 49. (Під дільником числа n ми розуміємо натуральне число, яке ділить n без остачі. Числа 1 і n також є дільниками.) Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Таке число лише одне.
(b) Кількість таких чисел парна.
(c) Кількість таких чисел є менша, ніж 5.
(d) Кількість таких чисел є менша, ніж 10.
(e) Існує безкінечна кількість таких чисел.

10. Нехай M є множина всіх дійсних розв'язків рівняння

$$e^{2\ln(\mathrm{tg}\, x)} = e^{-2\ln(\cos x)} - 1$$

(ln означає натуральний логарифм.) Визначте, які твердження є правдивими.

(a) Якщо $x \in M$, то $-x \in M$.
(b) Якщо $x \in M$, то $(x + \pi) \in M$.
(c) Якщо $x \in M$, то $(x + 2\pi) \in M$.
(d) Якщо $x \in M$, то $2x \in M$.
(e) Множина M містить непорожній відкритий інтервал.

Відповіді:

1. Правильні відповіді: ННHТТ
2. Правильні відповіді: НТТНН
3. Правильні відповіді: НТНТН
4. Правильні відповіді: НТНТН
5. Правильні відповіді: ТНННТ
6. Правильні відповіді: ТТТНН
7. Правильні відповіді: НТНТТ
8. Правильні відповіді: ТНТНН
9. Правильні відповіді: НТТТН
10. Правильні відповіді: ННТНТ