PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní program: FMUPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (20 bodů)

(a) V závislosti na parametrech $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{an+b}{an+c}\right)^n.$$

(b) V závislosti na parametru $k \in \mathbb{N}$ rozhodněte o konvergenci následující řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn+1)^n (2n)!}{n^{2n+1} n! 8^n}.$$

Jednotlivé kroky řádně zdůvodněte.

Úloha 2 (20 bodů)

(a) Ať

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x < y < x+1, \\ -1, & \text{pokud } x-1 < y < x, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Rozhodněte, zda platí

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

(b) Spočtěte

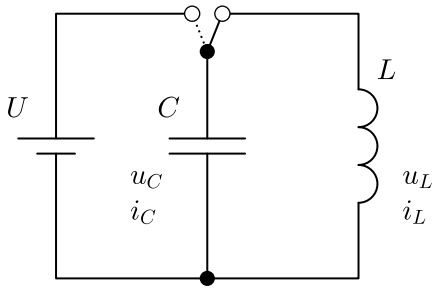
$$\int_M \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $M = [0,1] \times [0,2]$.

Úloha 3 (20 bodů)

Máme LC oscilační obvod (elektrický odpor zanedbáváme). Na začátku byl kondenzátor o kapacitě C nabit stejnosměrným zdrojem na napětí U a následně byl přepínačem zdroj odpojen a byla zapojena cívka s indukčností L – viz obrázek 1. Napětí na kondenzátoru, resp. cívce, je označeno u_C, resp. u_L (analogicky u proudů i_C a i_L).

OBRÁZEK 1. LC oscilační obvod



Na základě 1. a 2. Kirchhoffova zákona platí

$$i_C = i_L$$

a

$$u_C + u_L = 0 \tag{Z3.1}$$

a budeme tedy proud označovat jednotně i. Při vybíjení kondenzátoru bude obvodem téci proud

$$i = -C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \tag{Z3.2}$$

a na cívce se bude indukovat napětí

$$u_L = -L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{Z3.3}$$

Na základě uvedených rovnic odvoďte $i(t)$, $u_C(t)$ a $u_L(t)$ a zakreslete je do připraveného grafu na obrázku 2. Jelikož se jedná o oscilační obvod, odvoďte vzorec pro frekvenci.

OBRÁZEK 2. Závislost i, u_C a u_L na čase

Úloha 4 (20 bodů)

V kvantové mechanice lze vyjádřit relace neurčitosti operátoru $\hat{A}$ a $\hat{B}$ jako

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\,\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}\,|\langle[\Delta\hat{A},\ \Delta\hat{B}]\rangle|^2, \tag{Z4.1}$$

kde jsou na levé straně nerovnosti střední kvadratické odchylky a výraz $\langle[\Delta\hat{A},\ \Delta\hat{B}]\rangle$ je střední hodnota komutátoru odchylek operátorů $\hat{A}$ a $\hat{B}$ od jejich středních hodnot. Střední hodnota operátoru je definována jako

$$\langle\hat{C}\rangle = \langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle = \int \psi^*\,\hat{C}\,\psi\,\mathrm{d}V, \tag{Z4.2}$$

kde ψ je vlnová funkce a ψ^* je k ní komplexně sdružená. $|\psi|^2 = \psi^*\,\psi$ udává hustotu pravděpodobnosti výskytu částice, a proto platí

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int \psi^*\,\psi\,\mathrm{d}V = 1. \tag{Z4.3}$$

Pro komutátor odchylek platí

$$[\Delta\hat{A},\ \Delta\hat{B}] = [\hat{A},\ \hat{B}] = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}. \tag{Z4.4}$$

Vypočítejte relace neurčitosti pro hybnost a polohu a vysvětlete jejich důsledky. Operátor hybnosti, resp. polohy, je definován jako

$$\hat{\vec{p}} = -i\,\hbar\,\vec{\nabla}, \tag{Z4.5}$$

resp.

$$\hat{\vec{r}} = \vec{r}\,\hat{\mathbb{E}}, \tag{Z4.6}$$

kde $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x_1,\ \partial/\partial x_2,\ \partial/\partial x_3)$, $\hat{\mathbb{E}}$ je jednotkový operátor a $\vec{r} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní program: FMUPN

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (20 bodů)

(a) Pokud $b = c$, pak výsledek je triviálně 1. Předpokládejme tedy nadále, že $b \neq c$. Víme, že pro velká n platí:

$$\left(\frac{an+b}{an+c}\right)^n = e^{n\log\left(\frac{an+b}{an+c}\right)}.$$

Ze spojitosti exponenciály a Heineho věty tedy plyne, že pokud

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right) = A \in \mathbb{R},$$

pak hledaný výsledek je e^A. Protože $a \neq 0$ a $b \neq c$, tak $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax+b}{ax+c} = 1$ a $\frac{ax+b}{ax+c} \neq 1$ pro $x \neq -\frac{c}{a}$. Můžeme tedy substituovat $y = \frac{ax+b}{ax+c}$ a s pomocí věty o limitě složené funkce a známé limity $\lim_{y\to1} \frac{\log y}{y-1} = 1$ obdržíme:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\log\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)}{\frac{ax+b}{ax+c}-1}\cdot\left(\frac{ax+b}{ax+c}-1\right)x \\ &= 1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{(b-c)x}{ax+c} = \frac{b-c}{a}.\end{aligned}$$

Výsledek je tedy $e^{\frac{b-c}{a}}$.

(b) Použijeme limitní podílové kritérium:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)(kn+k+1)}{8(n+1)^3}\left(\frac{kn+k+1}{kn+1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{k}{2}\cdot e\cdot e^{-2} = \frac{k}{2e}.\end{aligned}$$

Tedy řada je konvergentní pro $k \leq 5$ a divergentní pro $k \geq 6$. Při výpočtu jsme použili část (a):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{kn+k+1}{kn+1}\right)^n = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+1} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)^2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \left(e^{-1}\right)^2\cdot 1 = e^{-2}.$$

Úloha 2 (20 bodů)

(a) Pro $y \geq 1$ je zjevně $\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = 1-1 = 0$. Pro $0 \leq y < 1$ je $\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = y-1$. Celkově tedy vychází integrál vlevo jako $\int_0^1 (y-1)\,\mathrm{d}y = [\frac{1}{2}y^2 - y]_0^1 = -\frac{1}{2}$. Symetrickým výpočtem dostaneme, že integrál vpravo je roven $\frac{1}{2}$. Rovnost integrálů tedy v uvedeném případě neplatí.

(b) Množina $[0,1] \times [0,2]$ je kompaktní a integrovaná funkce je na této množině spojitá, tedy omezená a celkově proto integrovatelná. Můžeme proto použít Fubiniovu větu a počítat standardním výpočtem s využitím metody per-partes:

$$\begin{aligned}\int_M \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left([\log(1+xy)]_{y=0}^{y=2}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \log(1+2x)\,\mathrm{d}x = [x\log(1+2x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+2x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \log 3 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+2x}\right)\mathrm{d}x = \log 3 - 1 + \left[\frac{1}{2}\log(1+2x)\right]_0^1 = \\ &= \log 3 - 1 + \frac{1}{2}\log 3 = \frac{3}{2}\log 3 - 1.\end{aligned}$$

Úloha 3 (20 bodů)

Vytvoříme diferenciální rovnici pro proud i. Rovnici (Z3.2) upravíme na tvar

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{C} \tag{1}$$

a rovnici (Z3.3) zderivujeme podle času, tj.

$$\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} = -L\,\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2}$$

Sečtením rovnic (1) a (2) získáme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(u_C + u_L) = -\frac{i}{C} - L\,\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}. \tag{3}$$

Na základě rovnice (Z3.1) víme, že levá strana rovnice (3) je rovna 0. Dosazením a úpravou tedy dostáváme

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{L\,C}\,i.$$

Získali jsme známou diferenciální rovnici, jejíž řešení můžeme vyjádřit například ve tvaru

$$i = I\ \sin(\omega\, t),$$

kde jsme zvolili nulovou počáteční fázi, I je amplituda proudu a $\omega = 1/\sqrt{L\,C}$. Ze známé rovnice $\omega = 2\,\pi\ f$ můžeme odvodit vzorec pro frekvenci:

$$f = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{LC}}.$$

Napětí u_L získáme z rovnice (Z3.3) dosazením řešení proudu:

$$u_L = -L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(I\ \sin(\omega\, t)) = -\omega\, L\, I\ \cos(\omega\, t). \tag{4}$$

Člen $\omega\, L\, I$ je amplitudou napětí a jedná se o napětí U (maximální napětí, na které byl na začátku nabit kondenzátor). Na základě toho lze s využitím vztahu $\omega = 1/\sqrt{L\,C}$ odvodit vztah pro neznámou amplitudu proudu:

$$I = \frac{U}{\omega\, L} = \frac{U}{\frac{L}{\sqrt{L\,C}}} = \sqrt{\frac{C}{L}}\,U.$$

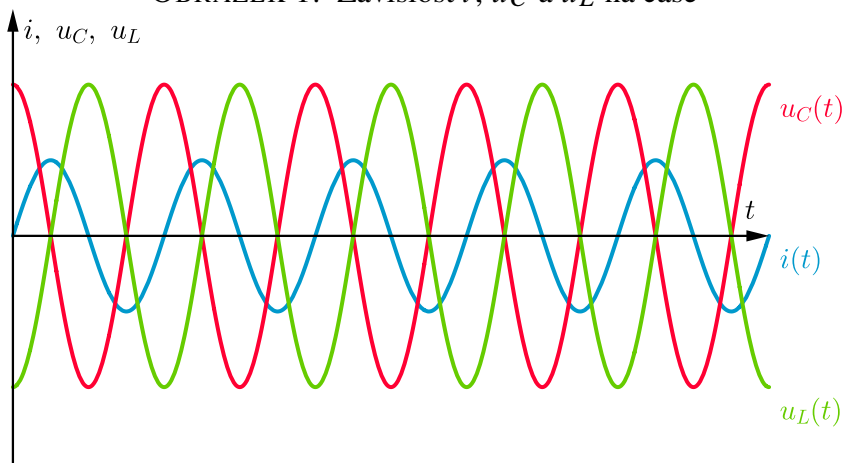
Napětí u_C získáme z rovnic (Z3.1) a (4):

$$u_C = -u_L = U\ \cos(\omega\, t).$$

Níže je shrnutí výsledků a na obrázku 1 jsou naznačené časové průběhy $i(t)$, $u_C(t)$ a $u_L(t)$ ve zvolené znaménkové konvenci (pro přehlednost jsou v obrázku amplitudy I a U zvoleny různě velké, ale jejich srovnání nemá smysl – jedná se o různé fyzikální veličiny).

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U\ \cos(\omega\, t), \\ u_L(t) &= -U\ \cos(\omega\, t), \\ i(t) &= \sqrt{\frac{C}{L}}\, U\ \sin(\omega\, t), \\ f &= \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{LC}}. \end{aligned}$$

OBRÁZEK 1. Závislost i, u_C a u_L na čase



Úloha 4 (20 bodů)

K vyjádření relací neurčitosti hybnosti a polohy budeme muset znát komutátor $[\Delta\hat{\vec{p}},\ \Delta\hat{\vec{r}}]$, resp. $[\hat{\vec{p}},\ \hat{\vec{r}}]$. Pro jeho výpočet použijeme rovnici (Z4.4), pomocnou funkci ψ a pro jednoduchost budeme problém řešit v jednotlivých složkách.

$$[\hat{p}_n,\ \hat{x}_m]\psi = \hat{p}_n\,\hat{x}_m\psi - \hat{x}_n\,\hat{p}_m\psi,$$

kde $n,\ m = 1,\ 2,\ 3$. Nyní dosadíme z rovnic (Z4.5) a (Z4.6) definice operátorů a získáme:

$$\begin{aligned} [\hat{p}_n,\ \hat{x}_m]\psi &= -i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial x_n}(x_m\,\psi) - x_m\left(-i\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right) = \\ &= -i\,\hbar\,\frac{\partial x_m}{\partial x_n}\,\psi - i\,\hbar\,x_m\,\frac{\partial\psi}{\partial x_n} + i\,\hbar\,x_m\,\frac{\partial\psi}{\partial x_n} = -i\,\hbar\,\frac{\partial x_m}{\partial x_n}\,\psi = -i\,\hbar\,\delta_{nm}\psi. \end{aligned}$$

$$[\hat{p}_n,\ \hat{x}_m] = -i\,\hbar\,\delta_{nm},$$

kde δ_{nm} je Kroneckerovo delta.

Střední hodnotu $[\Delta\hat{p}_n,\ \Delta\hat{x}_m]$ zjistíme dosazením do rovnice (Z4.2) a s využitím rovnice (Z4.3) dopočítáme:

$$\begin{aligned} \langle[\Delta\hat{p}_n,\ \Delta\hat{x}_m]\rangle &= \int \psi^*\,[\Delta\hat{p}_n,\ \Delta\hat{x}_m]\,\psi\,\mathrm{d}V = \int \psi^*\,(-i\,\hbar\,\delta_{nm})\,\psi\,\mathrm{d}V = \\ &= -i\,\hbar\,\delta_{nm}\int \psi^*\,\psi\,\mathrm{d}V = -i\,\hbar\,\delta_{nm}. \end{aligned}$$

Dopočítáme $|\langle[\Delta\hat{p}_n,\ \Delta\hat{x}_m]\rangle|^2$ jako součin komplexního a komplexně sdruženého čísla:

$$|\langle[\Delta\hat{p}_n,\ \Delta\hat{x}_m]\rangle|^2 = |-i\,\hbar\,\delta_{nm}|^2 = (-i\,\hbar\,\delta_{nm})^*\,(-i\,\hbar\,\delta_{nm}) = -i^2\,\hbar^2\,\delta_{nm}^2.$$

$-i^2$ je rovno 1 a δ_{nm} nabývá pouze hodnot 1 nebo 0, což umocněním na druhou nijak nezměníme. Tedy

$$|\langle[\Delta\hat{p}_n,\ \Delta\hat{x}_m]\rangle|^2 = \hbar^2\,\delta_{nm}. \tag{5}$$

Nyní můžeme do rovnice (Z4.1) dosadit operátory hybnosti a polohy a výsledek z rovnice (5) a získáme tak hledané relace neurčitosti:

$$\langle(\Delta\hat{p}_n)^2\rangle\,\langle(\Delta\hat{x}_m)^2\rangle \geq \frac{1}{4}\,\hbar^2\,\delta_{nm}, \tag{6}$$

respektive je lze psát ve tvaru

$$\Delta p_n\,\Delta x_m \geq \frac{\hbar}{2}\,\delta_{nm}.$$

Důsledky relací neurčitosti si ilustrujeme na případu $\hat{p}_1$ a $\hat{x}_1$, což pro názornost přeznačíme na $\hat{p}_x$ a $\hat{x}$. Z nerovnice (6) vyplývá, že pokus o lokalizaci částice na souřadnici x (tj. $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle \to 0$) vede k její „delokalizaci“ na souřadnici p_x (tj. $\langle(\Delta\hat{p}_x)^2\rangle \to \infty$) a naopak. Stejně tak pro souřadnice p_2 a x_2, resp. p_y a y, a p_3 a x_3, resp. p_z a z.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní program: FMUPN

Varianta B

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (20 bodů)
Spočtěte

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{6 + 11\cos x + 6\cos^2 x + \cos^3 x}\,\mathrm{d}x$$

na maximálních možných intervalech a tyto intervaly určete.

Úloha 2 (20 bodů)

(a) Ukažte, že množina bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pro které

$$x^2 + 4y^2\cos x - z^2 = 2xyz,$$

je na nějakém okolí bodu $(0, 1, 2)$ grafem spojitě diferencovatelné funkce $f(x, y)$, která je definovaná na jistém okolí bodu $(0, 1)$ a splňuje $f(0, 1) = 2$.

(b) Spočtěte parciální derivaci f podle x v bodě $(0, 1)$.

(c) Spočtěte totální diferenciál f v bodě $(0, 1)$.

(d) Má funkce f v bodě $(0, 1)$ lokální minimum?

Pokud používáte větu o implicitních funkcích, ověřte její předpoklady.

Úloha 3 (20 bodů)
Nehomogenní koule o poloměru R má proměnnou objemovou hustotu, která kvadraticky roste se vzdáleností r od středu koule:

$$\varrho(r) = Kr^2,$$

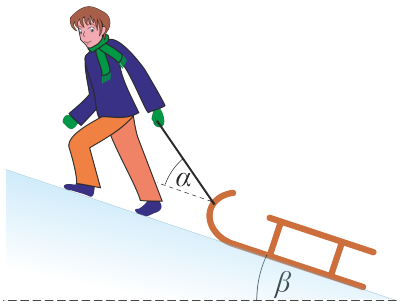
kde K je kladná reálná konstanta.

(1) Určete hmotnost koule m.

(2) Určete poloměr sféry, která by byla s koulí soustředná a rozdělila ji na dvě disjunktní tělesa stejné hmotnosti.

(3) Určete moment setrvačnosti koule vzhledem k ose procházející jejím středem.

Úloha 4 (20 bodů)
Chlapec táhne sáňky vzhůru po zasněženém svahu se stoupáním β za provázek, který svírá s rovinou svahu úhel α. Najděte takovou velikost úhlu α, při kterém bude síla vynaložená na tažení saní nejmenší. Koeficient smykového tření mezi saněmi a sněhem je $f = 0{,}1$ a rychlost saní zůstává stálá.



PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2025

Studijní program: FMUPN

Varianta B – **Řešení**

Úloha 1 (20 bodů)

Integrál nejdříve upravíme

$$I = \int \frac{\tan x}{6 + 11\cos x + 6\cos^2 x + \cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x(6 + 11\cos x + 6\cos^2 x + \cos^3 x)}\,\mathrm{d}x.$$

Po substituci $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,\mathrm{d}x$ dostáváme

$$I = -\int \frac{1}{t(6 + 11t + 6t^2 + t^3)}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t.$$

Zde použijeme rozklad na parciální zlomky. Protože máme jen jednonásobné reálné kořeny, můžeme použít zakrývací pravidlo. Obdržíme

$$\frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)} = \frac{1}{6t} - \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t+2)} - \frac{1}{6(t+3)}.$$

Tak dostaneme

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{6}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{6}\int \frac{1}{t+3}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \\ &\overset{c}{=} -\frac{1}{6}\log|t| + \frac{1}{2}\log|t+1| - \frac{1}{2}\log|t+2| + \frac{1}{6}\log|t+3| = \\ &= -\frac{1}{6}\log|\cos x| + \frac{1}{2}\log(\cos x + 1) - \frac{1}{2}\log(\cos x + 2) + \frac{1}{6}\log(\cos x + 3). \end{aligned}$$

Maximální intervaly jsou $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$, $(\frac{\pi}{2}, \pi) + 2k\pi$ a $(\pi, \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Úloha 2 (20 bodů)

(a) Označme $F(x, y, z) = x^2 + 4y^2\cos x - z^2 - 2xyz$. Zřejmě F je spojitě diferencovatelná funkce, $F(0, 1, 2) = 0$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -2z - 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 2) = -4 \neq 0,$$

tedy množina $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ F(x, y, z) = 0\}$ je podle věty o implicitních funkcích na nějakém okolí bodu $(0, 1, 2)$ grafem spojitě diferencovatelné funkce f, pro kterou $f(0, 1) = 2$.

(b) Snadno spočteme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 4y^2\sin x - 2yz, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 2) = -4.$$

Z věty o implicitních funkcích pak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 2)},$$

tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -1.$$

(c) Podobně jako v (b) spočteme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 8y\cos x - 2xz, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1, 2) = 8,$$

tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2.$$

Ze spojitosti parciálních derivací plyne existence totálního diferenciálu, a tedy $Df(0,1)(h,k) = -h + 2k$.

(d) Parciální derivace f v bodě $(0,1)$ jsou (dokonce obě) nenulové, tedy není splněna nutná podmínka pro existenci lokálního extrému v bodě $(0,1)$. Funkce f tedy lokální extrém v bodě $(0,1)$ nemá.

Úloha 3 (20 bodů)

(1) Protože koule je nehomogenní, její hmotnost m určíme integrací – tu lze provést různými způsoby. Můžeme si například představit, že koule je složena z velkého množství infinitezimálně tenkých slupek o objemu $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$. Celkovou hmotnost získáme integrací přes proměnnou r:

$$m = \int_V \varrho\,\mathrm{d}V = \int_0^R 4\pi\varrho(r)r^2\,\mathrm{d}r = \int_0^R 4\pi K r^4\,\mathrm{d}r = \frac{4}{5}\pi K R^5.$$

Jiným způsobem je integrace ve sférických souřadnicích (s počátkem zvoleným ve středu koule), která vede také přímočaře k výsledku:

$$m = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varrho(r)r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_0^R Kr^4\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{4}{5}\pi K R^5.$$

(2) Hledáme-li poloměr R_0 soustředné sféry, která by rozdělila kouli na dvě tělesa stejné hmotnosti, lze jednoduše vyjít z toho, že takováto sféra vymezí menší kouli o poloměru R_0 a hmotnosti $\frac{m}{2}$. Tuto hmotnost lze znovu naintegrovat více způsoby – například opět přes infinitezimálně tenké slupky:

$$\frac{m}{2} = \int_0^{R_0} 4\pi\varrho(r)r^2\,\mathrm{d}r.$$

Dosazením do levé strany této rovnice a vyintegrováním pravé strany dostáváme:

$$\frac{2}{5}\pi K R^5 = \frac{4}{5}\pi K R_0^5,$$

odkud snadno dostaneme výsledek, který se dal zahlédnout i bez výpočtu:

$$R_0 = \frac{R}{\sqrt[5]{2}}.$$

(3) Pro výpočet momentu setrvačnosti nehomogenní koule budeme opět integrovat:

$$J = \int_V r_\perp^2 \varrho\,\mathrm{d}V,$$

kde $r_\perp$ je vzdálenost bodu koule k ose otáčení. Protože problém je sféricky symetrický, budeme jej řešit ve sférických souřadnicích:

$$J = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_\perp^2 \varrho(r)r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

Jako osu otáčení si vybereme osu z – je samozřejmě možné vybrat jakoukoliv jinou osu procházející středem koule (úloha má sférickou symetrii), ale z hlediska obvyklého zavedení sférických souřadnic ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$) bude

výpočet vztažený k ose z nejjednodušší. Vzdálenost $r_\perp$ od osy z totiž vyjádříme jako: $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin\theta$, dosadíme do integrálu a upravíme:

$$J = K \int_0^R r^6 \,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{7} K R^7 \int_0^\pi \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta,$$

přičemž zbylý integrál vyřešíme pomocí jednoduché substituce $\cos\theta = t$ a dostaneme:

$$J = \frac{8\pi K R^7}{21}.$$

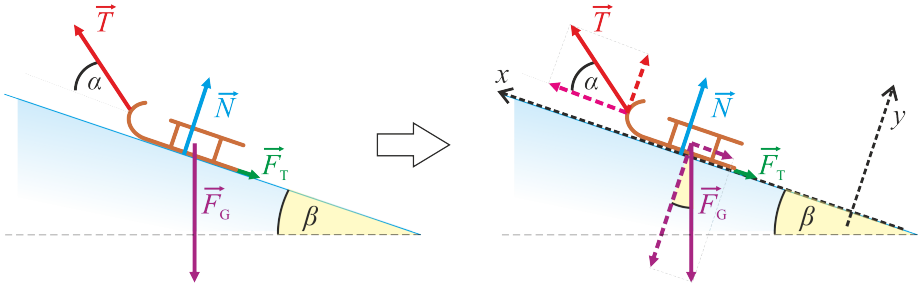
Alternativní řešení: Jiným způsobem lze k výsledku dojít tak, že přeintegrujeme vztah pro moment setrvačnosti tenké kulové slupky ($J_{\text{slupka}} = \frac{2}{3} m r^2$) o objemu $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \,\mathrm{d}r$ přes souřadnici r:

$$\mathrm{d}J = \frac{2}{3} r^2 \,\mathrm{d}m = \frac{2}{3} r^2 \varrho \,\mathrm{d}V = \frac{2}{3} r^2 \varrho 4\pi r^2 \,\mathrm{d}r,$$

$$J = \frac{8}{3}\pi K \int_0^R r^6 \,\mathrm{d}r = \frac{8\pi K R^7}{21}.$$

Úloha 4 (20 bodů)

Abychom mohli hledat úhel α, pro který je tahová síla (označme ji $\vec{T}$) minimální, budeme muset nejdříve najít závislost její velikosti na tomto úhlu, tj. $T = T(\alpha)$. Začneme rozkreslením působících sil – jsou jimi tíhová síla $\vec{F}_G$, tlaková síla svahu $\vec{N}$, tahová síla $\vec{T}$ a třecí síla $\vec{F}_T$. Abychom mohli uvažovat ve skalárních rovnicích, tyto síly rozložíme do směru rovnoběžného s nakloněnou rovinou a směru kolmého na rovinu (viz obrázek).



Pokud se sáňky pohybují stálou rychlostí, musí být výslednice sil ve směru osy x i osy y nulová, tedy:

$$T\cos\alpha = F_t + F_G \sin\beta,$$
$$T\sin\alpha + N = F_G \cos\beta.$$

Ze druhé rovnice vyjádříme tlakovou sílu podložku N jako:

$$N = F_G \cos\beta - T\sin\alpha.$$

Protože třecí sílu lze vyjádřit pomocí součinitele smykového tření f jako $F_T = fN$, můžeme ze vztahu pro N dosadit do první rovnice:

$$T\cos\alpha = f(F_G\cos\beta - T\sin\alpha) + F_G\sin\beta,$$

odkud snadnou úpravou získáváme závislost $T = T(\alpha)$ ve tvaru:

$$T(\alpha) = \frac{F_G(f\cos\beta + \sin\beta)}{\cos\alpha + f\sin\alpha},$$

Pro nalezení lokálního extrému zderivujeme tuto funkci podle α a položíme derivaci rovnu nule:

$$\frac{\mathrm{d}T(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = F_G(f\cos\beta + \sin\beta)\frac{-(-\sin\alpha + f\cos\alpha)}{(\cos\alpha + f\sin\alpha)^2} = 0$$

Derivace je zjevně rovna nule pro $\alpha = \arctan f$ (a ještě lze případně ověřit, že jde skutečně o lokální minimum). Číselně dostáváme: $\alpha = \arctan 0{,}1 = 5{,}7°$.