

Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2023, varianta A

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 0 až 10 bodů. Za každou dobře označenou¹ odpověď získáte +2 body, za každou špatně označenou odpověď -2 body, za otázku bez odpovědi 0 bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni 0 body.

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupčky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnutí odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	
(a)	2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)
(b)	3	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
(c)	Méně než 12	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(0)
(d)	Kladné číslo	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)
(e)	1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
Bodů:		10		0		2		2		

¹Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

Úloha 1. Je dána funkce $f(x) = \sin(\cos x)$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Funkce f je sudá.
- (b) Funkce f je lichá.
- (c) Funkce f je omezená.
- (d) Funkce f je rostoucí.
- (e) Funkce f je periodická.

Úloha 2. Dvě kružnice k_1 a k_2 jsou zadány předpisy:

$$k_1 : (x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

$$k_2 : (x - 10)^2 + (y - 5)^2 = 169$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Kružnice k_1 protíná osu y .
- (b) Kružnice k_2 protíná osu y .
- (c) Vzdálenost středů obou kružnic je $2\sqrt{65}$.
- (d) Úsečka spojující středy obou kružnic protíná osu x .
- (e) Průnik k_1 , k_2 a osy x je neprázdný.

Úloha 3. Necht' je funkce f dána předpisem

$$f(x) = \sqrt{\frac{4 - 4x^2}{x - 1}}.$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Definiční obor funkce f je $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
- (b) Průnikem definičního oboru f a intervalu $(0, \infty)$ je prázdná množina.
- (c) Číslo 0 nepatří do oboru hodnot funkce f .
- (d) Funkční hodnoty $f(x) = 0$ nabývá funkce f pro právě dvě různá x .
- (e) Funkce f není ani sudá, ani lichá.

Úloha 4. Necht' M je množina všech reálných řešení nerovnice

$$\log^2(3x) + \log(3x) > 6,$$

kde \log je dekadický logaritmus. Rozhodněte, zda platí:

- (a) $\pi \in M$.
- (b) Množina M obsahuje výhradně kladná čísla.
- (c) $M \cap \langle 0, 1 \rangle = \emptyset$.
- (d) $M = (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$.
- (e) $M = \left(0, \frac{1}{3000}\right) \cup \left(\frac{100}{3}, \infty\right)$.

Úloha 5. Necht' p je přímka, která prochází bodem $A = [3; -1]$ a je kolmá na přímkou

$$q: x - 2y + 4 = 0.$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Přímka q prochází bodem $[6; 5]$.
- (b) Přímka p protíná přímku q v bodě $\left[\frac{6}{5}; \frac{13}{5}\right]$.
- (c) Přímka p prochází bodem $[1; 3]$.
- (d) Přímka p prochází bodem $\left[\frac{13}{5}; -\frac{2}{5}\right]$.
- (e) Přímka p protíná osu y v bodě $[0; 5]$.

Úloha 6. Necht' M je množina všech dvojic $[x; y]$ reálných čísel, které řeší soustavu rovnic

$$\begin{aligned} |x - y| &= 1, \\ |x| + |y| &= 1. \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Množina M je čtyřprvková.
- (b) V rovině xy existuje přímka, která obsahuje celou množinu M .
- (c) Existuje úsečka nenulové délky, která je celá obsažena v množině M .
- (d) Kdykoliv $[x; y] \in M$, pak také $[-x; -y] \in M$.
- (e) Kdykoliv $[x; y] \in M$, pak také $[-x; y] \in M$.

Úloha 7. Řešte nerovnici s neznámou x v oboru \mathbb{R} :

$$\frac{x - 4}{x - 1} + \frac{x + 4}{x + 1} \geq 2.$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Nerovnici řeší pouze kladná čísla x .
- (b) Množina řešení nerovnice je otevřený interval.
- (c) Je-li x řešením nerovnice, potom je řešením i $2x$.
- (d) Je-li x řešením nerovnice, potom je řešením i $x/2$.
- (e) Součin dvou řešení nerovnice je opět řešením nerovnice.

Úloha 8. Necht' je funkce f zadána předpisem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Hledejte reálná čísla a, b, c taková, aby platilo $f(-2) = -12$, $f(-1) = -2$ a $f(2) = 4$, a rozhodněte o platnosti následujících výroků:

- (a) Vhodná čísla a, b, c existují a jsou jednoznačně určena.
- (b) Číslo a je nutně záporné.
- (c) Součet $a + b + c$ je nutně roven 6.
- (d) Existuje racionální číslo x takové, že $f(x) = 0$.
- (e) Existuje záporné číslo x takové, že $f(x) = 4$.

Úloha 9. V lichoběžníku $ABCD$ platí $|AB| = 15$ cm, $\beta = 60^\circ$ (vnitřní úhel při vrcholu B), $\delta = 135^\circ$ (vnitřní úhel při vrcholu D) a výška lichoběžníku je 6 cm. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Velikost úhlu α (vnitřní úhel při vrcholu A) je 35° .
- (b) Délka strany CD je $2\sqrt{3}$ cm.
- (c) Délka strany DA je $6\sqrt{2}$ cm.
- (d) Součet vnitřních úhlů lichoběžníku je 360° .
- (e) Obsah lichoběžníku je větší než 60 cm².

Úloha 10. Ze samostatných 6 účastníků tenisového turnaje máme vylosovat dvě dvojice pro čtyřhru. Dva z účastníků jsou Adam a Bohouš (ostatní účastníci se jmenují jinak). Rozhodněte, zda platí:

- (a) Je 30 možností, kdo bude hrát v první dvojici.
- (b) Po vylosování první dvojice není více než 10 možností, kdo bude hrát ve druhé dvojici.
- (c) Je méně než 20 různých výběrů dvojice, která nebude hrát zápas.
- (d) Pokud Adam bude hrát proti Bohoušovi, je 12 možností, které dvojice budou hrát.
- (e) Pokud Adam bude hrát a Bohouš nikoli, je aspoň 12 možností, které dvojice budou hrát.

Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2023, varianta B

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 0 až 10 bodů. Za každou dobře označenou¹ odpověď získáte +2 body, za každou špatně označenou odpověď –2 body, za otázku bez odpovědi 0 bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni 0 body.

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupečky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnutí odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	
(a)	2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)
(b)	3	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
(c)	Méně než 12	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(0)
(d)	Kladné číslo	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)
(e)	1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
Bodů:		10		0		2		2		

¹Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

Úloha 1. Je dána funkce $f(x) = x^3\sqrt{x^2}$. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Funkce f je sudá.
- (b) Funkce f je lichá.
- (c) Funkce f je periodická.
- (d) Funkce f je omezená.
- (e) Funkce f je rostoucí.

Úloha 2. Dvě kružnice k_1 a k_2 jsou zadány předpisy:

$$k_1 : (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

$$k_2 : (x - 10)^2 + (y - 5)^2 = 169$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Kružnice k_1 protíná osu y .
- (b) Kružnice k_2 protíná osu y .
- (c) Kružnice k_1 protíná osu x .
- (d) Vzdálenost středů obou kružnic je 4.
- (e) Kružnice k_1 leží uvnitř kružnice k_2 .

Úloha 3. Necht' je funkce f dána předpisem

$$f(x) = \sin |x| - \cos x.$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Funkce f je lichá.
- (b) Funkce f je sudá.
- (c) Definiční obor funkce f je roven oboru hodnot funkce f .
- (d) Funkční hodnoty $f(x) = 1$ nabývá funkce f v nekonečně mnoha bodech.
- (e) Funkce f není prostá funkce.

Úloha 4. Necht' M je množina všech reálných řešení nerovnice

$$|2x + 1| - |3 - x| > |x|.$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) $1 \in M$.
- (b) Všechna reálná $x \in M$ jsou nezáporná.
- (c) $M \cap \langle 0, 1 \rangle = \emptyset$.
- (d) $M \subseteq \mathbb{R}$ je shora neomezená množina.
- (e) $M = (1, \infty)$.

Úloha 5. Dvě přímky p a q jsou zadány parametrickými předpisy

$$p = \{[1 + 2s; 2 - 3s] : s \in \mathbb{R}\},$$

$$q = \{[1 + 4t; 5 - 2t] : t \in \mathbb{R}\}.$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Přímky p a q se protínají v bodě $[-2; \frac{13}{2}]$.
- (b) Přímka p prochází bodem $[5; -4]$.
- (c) Přímka q prochází bodem $[9; 1]$.
- (d) Přímka p protíná osu y v bodě $[0; 4]$.
- (e) Přímka q protíná osu x v bodě $[11; 0]$.

Úloha 6. Necht' M je množina všech dvojic $[x; y]$ reálných čísel, které řeší soustavu rovnic

$$\begin{aligned} |x + y| &= 2, \\ |xy| &= 1. \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Množina M je dvouprvková.
- (b) V rovině xy existuje přímka, která obsahuje celou množinu M .
- (c) Existuje úsečka nenulové délky, která je celá obsažena v množině M .
- (d) Kdykoliv $[x; y] \in M$, pak také $[-x; -y] \in M$.
- (e) M obsahuje alespoň jeden bod z každého kvadrantu roviny.

Úloha 7. Řešte nerovnici s neznámou x v oboru \mathbb{R} :

$$x + 1 \leq \sqrt{x^2 + 3x}.$$

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Nerovnici řeší pouze kladná čísla x .
- (b) Množina řešení nerovnice je polouzavřený interval.
- (c) Je-li x řešením nerovnice, potom je řešením i $2x$.
- (d) Je-li x řešením nerovnice, potom je řešením i $x + 1$.
- (e) Součin dvou řešení nerovnice je opět řešením nerovnice.

Úloha 8. Necht' je funkce f zadána předpisem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Hledejte reálná čísla a, b, c taková, aby platilo $f(-4) = -3$, $f(-1) = -12$ a $f(1) = 12$, a rozhodněte o platnosti následujících výroků:

- (a) Existují vhodná čísla $a, b, c \in (0, \infty)$.
- (b) Číslo c je nutně kladné.
- (c) Existuje racionální číslo x takové, že $f(x) = 0$.
- (d) Existuje kladné číslo x takové, že $f(x) = -3$.
- (e) Čísla a, b, c lze nalézt taková, aby navíc platilo $f(3) = 60$.

Úloha 9. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C platí $|AB| = 10$ cm a $|CA| = 6$ cm. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Délka těžnice t_a (těžnice na stranu BC) je větší než 8 cm a menší než 9 cm.
- (b) Délka těžnice t_b (těžnice na stranu CA) je větší než 8 cm a menší než 9 cm.
- (c) Délka strany BC je 8 cm.
- (d) Poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC je 6 cm.
- (e) Výška v_c (výška na stranu AB) je větší než 4 cm a menší než 5 cm.

Úloha 10. Uvažujeme čtyřciferná čísla vytvořená z cifer 1 až 9. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Různých čísel bez opakování cifer je aspoň 3000.
- (b) Počet různých čísel, ve kterých se právě jedna cifra vyskytuje dvakrát, nepřesahuje 3000.
- (c) Různých čísel začínajících cifrou 5 a bez opakování cifer je aspoň 350.
- (d) Různých čísel začínajících cifrou 5, ve kterých se právě jedna cifra vyskytuje dvakrát, je 336.
- (e) Různých čísel začínajících cifrou 5 je stejně jako čísel končících cifrou 6.

Řešení A

- (1) A N A N A
- (2) N A A N A
- (3) N A N N A
- (4) N A N N A
- (5) A A A N A
- (6) N N A A N
- (7) N A N A A
- (8) A A A N N
- (9) N N A A A
- (10) N A A A A

Řešení B

- (1) N A N N A
- (2) N A A N A
- (3) N A N A A
- (4) N A A A A
- (5) A A A N A
- (6) N N N A A
- (7) N N A N A
- (8) N N N N A
- (9) N A A N A
- (10) A N N A A