Informatika – navazující magisterské studium
Přijímací zkouška z informatiky – 2019 – varianta A

Každá úloha je hodnocena maximálně 25 body.
Všechny své odpovědi zdůvodněte!

1. Máme neomezenou zásobu pětikorunových a sedmikorunových známek. Jakou nejvyšší částku v korunách pomocí těchto známek nemůžeme vyplatit?

2. Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, který přijímá všechna slova představující dekadický zápis kladného celého čísla beze zbytku dělitelného patnácti. V zápisu čísla nejsou povoleny vedoucí nuly, každé přijaté slovo musí začínat některým ze znaků 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Například slova 15, 300, 2745 automat přijme, zatímco slova 12, 015, 325 nepřijme. Přechodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít minimální počet stavů.

3. V celočíselné proměnné N je uložena kladná hodnota. Tuto hodnotu chceme převést do zápisu v šestnáctkové soustavě (tzn. v poziční číselné soustavě o základu 16) a výsledek uložit jako znakový řetězec. Popište slovně algoritmus řešení, zdůvodněte jeho správnost a asymptotickou časovou složitost. Algoritmus zapište ve tvaru funkce v programovacím jazyce Pascal, C/C++, Java, C# nebo Python.

4. Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v C jsou ekvivalentní):

```
program AA;
var i, p, n: integer;
begin
  read(n);
  p := 0;
  for i := 1 to n do
    if i mod 2 = 0 then
      p := p + i;
  write(p)
end.
```

```
#include <stdio.h>
void main(void)
{
  int i, p, n;
  scanf("%i", &n);
  p = 0;
  for(i = 1; i <= n; i++)
    if (i%2 == 0) p += i;
  printf("%i", p);
}
```

a) Určete, jaký výsledek obdržíme při výpočtu se vstupní hodnotou $n = 999$.

b) Určete všechny takové vstupní hodnoty n, pro které výpočet skončí s výsledkem 110.

c) Určete nejmenší vstupní hodnotu n, pro kterou je výsledkem výpočtu trojciferné číslo.

Řešení přijímací zkoušky z informatiky – 2019 – varianta A

1. Částku 23 Kč nemůžeme pomocí známek 5 Kč a 7 Kč vyplatit, což snadno ověříme rozborem všech možností:
- žádná 7 Kč známka – částka 23 Kč není dělitelná 5
- jedna 7 Kč známka – zbývající částka 16 Kč není dělitelná 5
- dvě 7 Kč známky – zbývající částka 9 Kč není dělitelná 5
- tři 7 Kč známky – zbývající částka 2 Kč není dělitelná 5.

Dalších pět po sobě jdoucích hodnot 24, 25, 26, 27, 28 Kč vyplatit můžeme:
$24 = 2 . 7 + 2 . 5$
$25 = 5 . 5$
$26 = 3 . 7 + 1 . 5$
$27 = 1 . 7 + 4 . 5$
$28 = 4 . 7$
Máme jistotu, že půjdou vyplatit také všechny vyšší částky. Stačí totiž k těmto pěti hodnotám přidávat postupně po jedné pětikorunové známce, pak po dvou pětikorunových známkách, po třech atd. Výsledkem úlohy je proto **23 Kč**.

2. Číslo je dělitelné 15, právě když je dělitelné 3 a zároveň 5. Číslo dělitelné 3 má ciferný součet dělitelný 3, zatímco číslo dělitelné 5 je zakončeno cifrou 0 nebo 5. Pomocí stavů automatu rozlišíme, jaký zbytek po dělení 3 dává již zpracovaná část vstupního slova (možnosti 0, 1 nebo 2) a v případě slov dělitelných třemi navíc pomocí vnitřního stavu rozlišíme, zda posledním přečteným znakem byla cifra 0 či 5, nebo nějaká jiná. Koncovým stavem je pouze ten, který odpovídá číslům dělitelným 3 a zakončeným cifrou 0 nebo 5. Samostatné stavy potřebujeme pro prázdné slovo a pro slova začínající vedoucí nulou, ta automat nepřijímá. Automat tedy bude mít šest stavů. Minimalitu počtu stavů ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	0	**3,6,9**	**1,4,7**	**2,8**	**5**	
→ **Z**	T	B	C	D	D	počáteční stav, nic nepřečteno
T	T	T	T	T	T	vstupní slovo začíná znakem 0
← **A**	A	B	C	D	D	číslo je dělitelné 3 a zároveň 5
B	A	B	C	D	D	je dělitelné 3, není dělitelné 5
C	C	C	D	B	A	číslo dává při dělení 3 zbytek 1
D	D	D	B	C	C	číslo dává při dělení 3 zbytek 2

3. Zadané číslo N budeme opakovaně celočíselně dělit šestnácti, dokud nedojdeme až k nule. Zbytky po tomto dělení tvoří odzadu zápis čísla N v šestnáctkové soustavě. Zbytky při dělení šestnácti jsou z rozmezí od 0 do 15, hodnoty 10 až 15 vyjadřujeme v šestnáctkové soustavě pomocí písmen A až F. Správnost uvedeného postupu zdůvodníme rozepsáním šestnáctkového zápisu čísla jako součet příslušných násobků mocnin šestnácti a úpravou tohoto zápisu pomocí Hornerova schématu. Počet provedených kroků výpočtu je přímo úměrný počtu cifer v šestnáctkovém zápisu čísla N, což je $\log_{16}N$. Asymptotická časová složitost algoritmu je tedy $O(\log N)$. Příklad zápisu algoritmu ve tvaru funkce:

```
function ToHex(N: integer): string;
var S, Cifra: string;
begin
  Cifra := '0123456789ABCDEF';
  S := '';
  while N > 0 do
    begin
    S := Cifra[N mod 16 + 1] + S;
    N:=N div 16;
    end;
  ToHex := S
end;
```

4. V proměnné p se počítá součet všech sudých čísel ležících v intervalu <1, n>. Hodnotu p odvodíme pomocí vzorce pro součet prvních k členů aritmetické posloupnosti: součet = (první + poslední) * počet / 2. Rozlišíme dva případy podle toho, zda n je sudé nebo liché. Výsledná hodnota p pro n sudé je:
$p = 2 + 4 + 6 + ... + n = (n + 2) . n/2 / 2 = n . (n + 2) / 4$
Pro n liché dostaneme stejným postup jen mírně změněný vztah:
$p = 2 + 4 + 6 + ... + (n - 1) = (n + 1) . (n - 1)/2 / 2 = (n + 1) . (n - 1) / 4$

a) Úlohu řešíme přímým dosazením vstupní hodnoty 999 do odvozeného vzorce pro lichá n, dostaneme výsledek p = **249500**.

b) Musíme uvažovat možnost sudého i lichého n. Pro sudá n řešíme rovnici
$n . (n + 2) / 4 = 110$
Tu upravíme na kvadratickou rovnici $n^2 + 2n – 440 = 0$, která má jediný kladný kořen n = **20**. Pro lichá n řešíme rovnici
$(n + 1) . (n - 1) / 4 = 110$.
Její úpravou dostaneme rovnici $n^2 = 441$, která má jediný kladný kořen n = **21**.

Výsledek 110 tedy získáme pro vstupní hodnoty **20** a **21**.

c) V řešení úlohy b) jsme zjistili, že pro vstupní hodnoty $n = 20$ a $n = 21$ je výsledek výpočtu 110, tedy velmi malý trojciferný. Dosazením hodnot $n = 18$ a $n = 19$ do odvozených vzorců zjistíme, že dostaneme dvojciferný výsledek 90. Oba vzorce představují rostoucí funkce, z čehož plyne, že nejmenší vstupní hodnotou s trojciferným výsledkem je **20**.

Informatika – navazující magisterské studium
Přijímací zkouška z informatiky – 2019 – varianta B

Každá úloha je hodnocena maximálně 25 body.
Všechny své odpovědi zdůvodněte!

1. Kolik existuje přirozených šesticiferných čísel, která jsou dělitelná patnácti a jsou zapsána pouze ciframi 3, 4 a 5?

2. Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, který přijímá všechna slova představující dekadický zápis kladného celého čísla beze zbytku dělitelného číslem 25. V zápisu čísla nejsou povoleny vedoucí nuly, každé přijaté slovo musí začínat některým ze znaků 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Například slova 25, 350, 4575 automat přijme, zatímco slova 5, 025, 25001 nepřijme. Přechodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít minimální počet stavů.

3. V celočíselné proměnné *Z* je uložena kladná hodnota z rozmezí od 2 do 16 (základ poziční číselné soustavy) a ve znakovém řetězci *S* je zápis čísla v soustavě o základu *Z*. Chceme vyjádřit hodnotu tohoto čísla a výsledek uložit do celočíselné proměnné. Popište slovně algoritmus řešení, zdůvodněte jeho správnost a asymptotickou časovou složitost. Algoritmus zapište ve tvaru funkce v programovacím jazyce Pascal, C/C++, Java, C# nebo Python.

4. Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```
program BB;
var i, j, p, n: integer;
begin
  read(n);
  p := 0;
  for i := 1 to n do
    for j := 1 to i do
      p := p + j mod 2;
  write(p)
end.
```

```
void main(void)
{
  int i, j, p, n;
  scanf("%i", &n);
  p = 0;
  for(i = 1; i <= n; i++)
    for(j = 1; j <= i; j++)
      p += j % 2;
  printf("%i", p);
}
```

a) Určete, jaký výsledek obdržíme při výpočtu se vstupní hodnotou $n = 99$.

b) Určete všechny takové vstupní hodnoty n, pro které výpočet skončí s výsledkem 110.

c) Určete nejmenší vstupní hodnotu n, pro kterou je výsledkem výpočtu trojciferné číslo.

Řešení přijímací zkoušky z informatiky – 2019 – varianta B

1. Každé číslo dělitelné patnácti je dělitelné pěti, a proto jeho zápis tvořený z cifer 3, 4, 5 musí končit cifrou 5. Číslo musí být dále dělitelné třemi, takže jeho ciferný součet je dělitelný třemi. Přípustné cifry 3, 4 a 5 dávají každá jiný zbytek při celočíselném dělení třemi (po řadě 0, 1, 2). Čtyři ze zbývajících pěti cifer čísla proto můžeme zvolit libovolně a pátá cifra je pak touto volbou již jednoznačně určena, aby zajistila dělitelnost celého čísla třemi. Celkem tedy podmínkám úlohy vyhovuje tolik čísel, kolika způsoby lze zvolit čtveřici cifer hledaného čísla, což je 3*3*3*3 = **81 možností**.

2. Číslo je dělitelné 25, právě když končí dvojčíslím 00, 25, 50 nebo 75. Pomocí stavů automatu rozlišíme, kterými znaky končí již přečtená část vstupního slova. V nekoncových stavech automatu musíme odlišit, zda je dosud přečtená část vstupního slova zakončena některým ze znaků 1, 3, 4, 6, 8, 9 (stav A), znakem 2 nebo 7 (stav B) nebo znakem 0 či 5 (aniž by se jednalo o koncové dvojčíslí 25, 75, 00, 50 – stav C). Koncovým stavem je ten, který odpovídá slovům zakončeným 00, 25, 50 nebo 75 (stav D). Samostatné stavy potřebujeme pro prázdné slovo (stav Z) a pro slova začínající vedoucí nulou (stav T), ta automat nepřijímá. Automat tedy bude mít šest stavů. Minimalitu počtu stavů ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	1,3,4,6,8,9	**2,7**	**5**	**0**	
→ **Z**	A	B	C	T	počáteční stav, nic nepřečteno
T	T	T	T	T	vstupní slovo začíná znakem 0
A	A	B	C	C	slovo končí 1,3,4,6,8 nebo 9
B	A	B	D	C	slovo končí 2 nebo 7
C	A	B	C	D	končí 0 nebo 5 (ne 00, 25, 50, 75)
← **D**	A	B	C	D	slovo končí 00, 25, 50, 75

3. Zápis čísla v poziční číselné soustavě o základu Z představuje hodnotu, kterou můžeme vyjádřit jako součet příslušných násobků mocnin čísla Z. Úpravou tohoto výrazu pomocí Hormerova schématu přímo dostaneme algoritmus na výpočet hledané hodnoty N. Výpočet hodnoty začíná od první cifry v řetězci S. Znakový řetězec S procházíme zleva doprava, dosavadní již spočítanou hodnotu vždy vynásobíme základem soustavy Z a k výsledku přičteme hodnotu další cifry. Cifry používané v zápisu čísla v soustavě o základu Z odpovídají číselným hodnotám z rozmezí od 0 do Z-1. Hodnoty 10 až 15 přitom obvykle vyjadřujeme pomocí písmen A až F. Při převodu musíme tyto „cifry“ zaměňovat za jim odpovídající číselné hodnoty.
Počet provedených kroků výpočtu je přímo úměrný počtu cifer v zápisu čísla N, tedy délce znakového řetězce S (což je logaritmus N o základu Z). Asymptotická časová složitost algoritmu je tedy O (|S|) neboli O(log N). Příklad zápisu algoritmu ve tvaru funkce:

```
function ToDec(Z: integer; S: string): integer;
var N, I: integer;
begin
  N := 0;
  for I := 1 to length(S) do
     begin
     if (S[I] >= '0') and (S[I] <= '9') then
       N:=N * Z + ord(S[I]) - ord('0')
     else
       N:=N * Z + ord(S[I]) - ord('A') + 10;
    end;
  ToDec := N
end;
```

4. Pro každé i od 1 do n se hodnota p zvýší o součet 1+0+1+0+... tvořený přesně i sčítanci, tedy o $(i+1)/2$ pro i liché a $i/2$ pro i sudé. Výsledná hodnota p proto bude rovna součtu prvních n sčítanců v řadě 1+1+2+2+3+3+… Pro n sudé tak dostáváme

$$p = 2.(1 + 2 + 3 + \ldots + n/2) = 2 \,.\, n/2 \,.\, (n/2 + 1) / 2 = n.(n+2)/4$$

Pro n liché obdobně odvodíme

$$p = 2.(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)/2) + (n+1)/2 = 2 \,.\, (n-1)/2 \,.\, ((n-1)/2 + 1) / 2 + (n+1)/2 =$$
$$= (n+1).\,(n-1)/4 + (n+1)/2 = (n+1)^2/4$$

a) Řešíme přímým dosazením do odvozeného vzorce pro n liché.

$p = (99+1)^2 / 4 =$ **2500**

b) Musíme zkusit oba odvozené vzorce, pro který získáme kladné celočíselné řešení n. První vztah $n.(n+2)/4 = 110$ vede na kvadratickou rovnici $n^2 + 2n - 440 = 0$, která má jeden kladný celočíselný kořen $n = 20$. Druhý vztah $(n+1)^2/4 = 110$ snadno upravíme na kvadratickou rovnici $n^2 + 2n - 439 = 0$, která nemá žádné celočíselné řešení.
Výsledek 110 tedy obdržíme pouze pro vstupní hodnotu n = **20**.

c) Z odvození vztahu pro výslednou hodnotu p přímo vyplývá, že s rostoucím n hodnota p ostře roste. V řešení úlohy b) jsme odvodili, že pro $n = 20$ dostáváme p = 110, což je velmi malé trojciferné číslo. Zkusme ještě vstupní hodnotu $n = 19$, pro ni dostáváme dosazením do příslušného vzorce výsledek $p = 100$, což je nejmenší trojciferné číslo. Správným výsledkem úlohy c) je tedy vstupní hodnota **19**.