Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2019

Studijní program: Fyzika
Studijní obor: FFUM

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (25 bodů)
Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \log(n+k),$$
$$y_n = \log\left(\sum_{k=1}^{n} k^k\right).$$

Spočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.
Vysvětlete své řešení.

Úloha 2 (25 bodů)
Ať $M = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \le 1,\, y \ge (x-1)^2\}$. Spočtěte

$$\int_M (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Úloha 3 (25 bodů)
Jeden mol jednoatomového ideálního plynu o atmosférickém tlaku $p_0 = 100\,\mathrm{kPa}$ necháme z jeho původního objemu $V_0 = 20\,\mathrm{dm}^3$ rozepnout na trojnásobek.

(1) Určete práci, kterou plyn vykonal, pokud byla jeho expanze:
  (a) izobarická,
  (b) izotermická,
  (c) adiabatická.
(2) Pro adiabatickou expanzi určete koncovou teplotou plynu.

Poissonova konstanta je pro jednoatomový plyn $\kappa = \frac{5}{3}$, tepelná kapacita při stálém objemu $C_V = \frac{3}{2}nR$.

Úloha 4 (25 bodů)
Do dvou vrcholů rovnostranného trojúhelníka (označme je A a B) jsou umístěny kladné bodové náboje o velikosti Q. Stranu trojúhelníka označme a. Obecně vyjádřete:

(1) Elektrickou intenzitu ve třetím, nábojem neobsazeném, vrcholu trojúhelníka (tedy ve vrcholu C).
(2) Zrychlení, které získá elektron vložený do tohoto vrcholu.
(3) Jak velký náboj bychom museli umístit do středu strany AB, aby byla intenzita v těžišti trojúhelníka nulová.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2019

Studijní program: Fyzika
Studijní obor: FFUM

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)
Nechť

$$\begin{aligned} a_n &= n \log n, \\ b_n &= n \log(2n), \\ c_n &= \log(n^n), \\ d_n &= \log(n^{n+1}). \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} 0 \le a_n \le x_n \le b_n, \\ 0 \le c_n \le y_n \le d_n. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{d_n} \le \frac{x_n}{y_n} \le \frac{b_n}{c_n}, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2 + \log n}{\log n} = 1. \end{aligned}$$

Použijeme větu o dvou strážnících a obdržíme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$.

Úloha 2 (25 bodů)
Snadno zjistíme, že pro $(x, y) \in M$ je $x \in [0, 1]$ a $y \le \sqrt{1-x^2}$. Z Fubiniovy věty dostáváme

$$\begin{aligned} \int_M (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_{(x-1)^2}^{\sqrt{1-x^2}} (x+2y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy + y^2 \right]_{y=(x-1)^2}^{y=\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} + (1-x^2) - x(x-1)^2 - (x-1)^4 \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} - x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x \right) \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} = \frac{43}{60}. \end{aligned}$$

Úloha 3 (25 bodů)
Pro potřeby výpočtu označme cílový objem plynu $V_1 = 3V_0$.

(1) V případě izobarické expanze je výpočet triviální – při stálém tlaku p_0 se zvětší objem plynu o $\Delta V = V_1 - V_0 = 2V_0$ a plyn tak vykoná práci $W_p = p_0 \Delta V = 2p_0V_0 = 4\,\mathrm{kJ}$.

(2) Při izotermickém ději pro ideální plyn platí rovnost $pV = \text{konst.}$, v našem případě konkrétně $pV = p_0V_0$. Průběh tlaku v závislosti na objemu je tedy na izotermě popsán vztahem:

$$p(V) = \frac{p_0V_0}{V}.$$

Práci W_T vykonanou plynem během izotermického děje získáme vyintegrováním tlaku přes objem, tedy:

$$W_T = \int_{V_0}^{V_1} p(V)\mathrm{d}V = p_0V_0\int_{V_0}^{V_1}\frac{1}{V}\mathrm{d}V = p_0V_0\ln\frac{V_1}{V_0}.$$

Číselným dosazením dostáváme:

$$W_T = (100000\cdot 0{,}020\cdot \ln 3)\,\mathrm{J} \approx 2{,}2\,\mathrm{kJ}.$$

(3) Podobně budeme postupovat také v případě adiabatického děje, který je pro ideální plyn vyjádřen rovností $pV^\kappa = \text{konst.}$, v našem případě konkrétně $pV^\kappa = p_0V_0^\kappa$. Průběh tlaku v závislosti na objemu je tedy na adiabatě popsán vztahem:

$$p(V) = \frac{p_0V_0^\kappa}{V^\kappa}.$$

Práci W_{AD} vykonanou plynem během adiabatického děje získáme opět vyintegrováním tlaku přes objem, tedy:

$$W_{AD} = \int_{V_0}^{V_1} p(V)\mathrm{d}V = p_0V_0^\kappa\int_{V_0}^{V_1}\frac{1}{V^\kappa}\mathrm{d}V.$$

Po zintegrování dostáváme:

$$W_{AD} = p_0V_0^\kappa\frac{1}{1-\kappa}\left[V^{1-\kappa}\right]_{V_0}^{V_1} = \frac{p_0V_0^\kappa}{1-\kappa}\left(V_1^{1-\kappa} - V_0^{1-\kappa}\right).$$

Po uvážení expanze na trojnásobný objem, tj. $V_1 = 3V_0$ lze výsledek upravit:

$$W_{AD} = \frac{p_0V_0^\kappa}{1-\kappa}\left((3V_0)^{1-\kappa} - V_0^{1-\kappa}\right) = \frac{p_0V_0^\kappa V_0^{1-\kappa}}{1-\kappa}\left(3^{1-\kappa}-1\right) = p_0V_0\frac{3^{1-\kappa}-1}{1-\kappa}.$$

Číselným dosazením získáme:

$$W_{AD} = 100000\cdot 0{,}020\cdot\frac{3^{1-\frac{5}{3}}-1}{1-\frac{5}{3}}\,\mathrm{J} \approx 1{,}6\,\mathrm{kJ}.$$

Jiné řešení: Alternativně lze tuto část úkolu řešit pomocí energetické bilance. Při adiabatickém ději je vyměňované teplo nulové, proto je možné určit vykonanou práci jako úbytek vnitřní energie plynu. Ta je pro ideální plyn přímo úměrná jeho teplotě, tj.:

$$W_{AD} = \Delta U = C_V\Delta T,$$

kde C_V je tepelná kapacita plynu při stálém objemu – pro jednoatomový ideální plyn je $C_V = \frac{3}{2}nR$, tedy:

$$W_{AD} = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_0).$$

Spojením předpisu adiabaty a stavové rovnice ideálního plynu dostáváme vztah mezi teplotou a objemem pro adiabatický děj ve tvaru:

$$T_0V_0^{\kappa-1} = T_1V_1^{\kappa-1} \Rightarrow T_1 = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\kappa-1}T_0,$$

který dosadíme do vztahu pro W_{AD}:

$$W_{AD} = \frac{3}{2} nRT_0 \left(\left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\kappa - 1} - 1 \right).$$

Ze stavové rovnice plyne, že $nRT_0 = p_0 V_0$, čímž dostáváme výsledný vztah:

$$W_{AD} = \frac{3}{2} p_0 V_0 \left(\left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\kappa - 1} - 1 \right) = \frac{3}{2} \cdot 100000 \cdot 0{,}020 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{5}{3} - 1} - 1 \right) \mathrm{J} \approx -1{,}6\,\mathrm{kJ}.$$

Znaménko minus ve výsledku značí, že jde o práci vykonanou plynem, tedy vedoucí k poklesu vnitřní energie systému.

(4) Spojením předpisu adiabaty a stavové rovnice ideálního plynu dostáváme vztah mezi teplotou a objemem pro adiabatický děj ve tvaru:

$$T_0 V_0^{\kappa - 1} = T_1 V_1^{\kappa - 1} \Rightarrow T_1 = \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\kappa - 1} T_0.$$

Teplotu T_0 přitom můžeme vyjádřit ze stavové rovnice ideálního plynu jako:

$$T_0 = \frac{p_0 V_0}{nR},$$

odkud dostáváme:

$$T_1 = \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\kappa - 1} \frac{p_0 V_0}{nR} = \left(\left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{5}{3} - 1} \right) \frac{100000 \cdot 0{,}020}{1 \cdot 8{,}31} \mathrm{K} \approx 115\,\mathrm{K}.$$

Úloha 4 (25 bodů)

Předpokládejme, že budeme problém řešit ve vakuu.

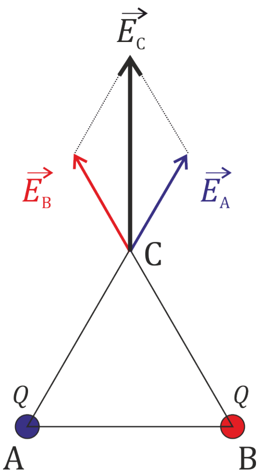
(1) Kladný bodový náboj kolem sebe vytváří radiální elektrické pole, jehož elektrická intenzita míří v každém bodě prostoru směrem od náboje. V bodě C mají jak elektrická intenzita vytvářená nábojem A, tak elektrická intenzita vytvářená nábojem B velikost

$$E_A = E_B \overset{\text{ozn.}}{=} E_0 = k \frac{Q}{a^2},$$

přičemž vektory $\vec{E}_A$ a $\vec{E}_B$ spolu svírají úhel $\alpha = 60°$. Jednoduchou geometrií (obrázek) dojdeme k tomu, že elektrická intenzita v bodě C míří kolmo na stranu AB směrem od středu trojúhelníka a má velikost:

$$E_C = 2E_0 \cos \frac{\alpha}{2} = 2k \frac{Q}{a^2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

kde $\alpha = 60°$.



(2) Zrychlení určíme triviálně pomocí 2. Newtonova zákona. Elektrickou sílu působící na elektron $F_e = E_C e$ položíme rovnu součinu ma, kde m je hmotnost elektronu a e elementární náboj:

$$E_C e = ma \Rightarrow a = \frac{E_C e}{m} = \frac{2keQ}{ma^2} \cos\frac{\alpha}{2}.$$

(3) Abychom mohli na otázku odpovědět, nejdříve si spočítáme, jakou intenzitu vytvářejí v těžišti T náboje umístěné v bodech A a B. Vzdálenost těžiště trojúhelníka od bodu A je:

$$|AT| = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

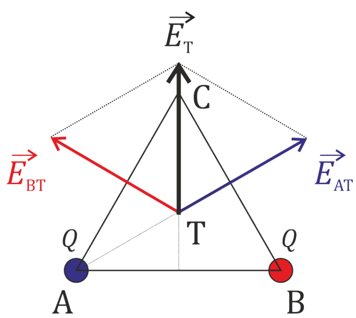
tedy pro intenzitu E_{AT} způsobovanou nábojem A v těžišti platí:

$$E_{AT} = k\frac{Q}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = 3k\frac{Q}{a^2}.$$

Vzhledem k symetrii problému má intenzita E_{BT} způsobovaná v těžišti nábojem B stejnou velikost, přičemž vektory $\vec{E}_{AT}$ a $\vec{E}_{BT}$ svírají úhel $\beta = 120°$. Z jednoduché geometrie tedy získáváme, že elektrická intenzita v těžišti míří směrem k vrcholu C (obrázek) a má velikost:

$$E_T = 2E_{AT}\cos\frac{\beta}{2} = 6k\frac{Q}{a^2}\cos\frac{\beta}{2},$$

kde $\beta = 120°$.



Má-li být intenzita v těžišti nulová, musí zde náboj umístěný do středu strany AB (tj. vzdálený $|S_{AB}T| = \frac{\sqrt{3}}{6}a$) způsobovat stejně velkou intenzitu opačného směru. Tento hledaný náboj musí být tedy záporný a označíme-li si jeho velikost q, dostáváme pro ni podmínku:

$$k\frac{q}{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2} = 6k\frac{Q}{a^2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Odtud již snadno dostaneme velikost hledaného záporného náboje:

$$q = \frac{Q}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$