# Přijímací zkouška na MFF UK

## pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

## 2018, varianta A

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

**Bodování.** Za každou úlohu je možno získat $0$ až $10$ bodů. Za každou dobře označenou[1] odpověď získáte $+2$ body, za každou špatně označenou odpověď $-2$ body, za otázku bez odpovědi $0$ bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni $0$ body.

**Způsob označování a korekce.** Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupečky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

**Příklad.** Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtání odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

| | | Odpovědi | | | Odpovědi | | | Odpovědi | | | Odpovědi | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Ano | Ne | | Ano | Ne | | Ano | Ne | | Ano | Ne | |
| (a) | 2 | ● | ○ | $(+2)$ | ● | ○ | $(+2)$ | ○ | ○ | $(0)$ | ○ | ○ | $(0)$ |
| (b) | 3 | ○ | ● | $(+2)$ | ○ | ○ | $(0)$ | ○ | ● | $(+2)$ | ~~●~~ | ● | $(+2)$ |
| (c) | Méně než $12$ | ● | ○ | $(+2)$ | ○ | ● | $(-2)$ | ○ | ○ | $(0)$ | ~~●~~ | ○ | $(0)$ |
| (d) | Kladné číslo | ● | ○ | $(+2)$ | ○ | ○ | $(0)$ | ○ | ● | $(-2)$ | ~~●~~ | ● | $(-2)$ |
| (e) | 1 | ○ | ● | $(+2)$ | ● | ○ | $(-2)$ | ○ | ● | $(+2)$ | ~~●~~ | ● | $(+2)$ |
| Bodů: | | | **10** | | | **0** | | | **2** | | | **2** | |

[1]Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

**1.** Uvažujme funkci $f(x) = x|x|$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Funkce $f$ je sudá.
(b) Funkce $f$ je lichá.
(c) Funkce $f$ je periodická.
(d) Funkce $f$ je rostoucí.
(e) Funkce $f$ je prostá.

**2.** Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\frac{kx+1}{x-2} = \frac{kx-1}{x+2}$ s parametrem $k \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda platí:

(a) Rovnice má jediný kořen pro každé $k \in \mathbb{R}$.
(b) $x = 2$ je kořenem rovnice pro $k = 1/2$.
(c) Pro $k = -1/2$ vyhovuje rovnici každé $x \neq 2$.
(d) Rovnice má jediný kořen $x = 0$ pro $k = -1/2$.
(e) Rovnice má jediný kořen $x = 0$ pro $k \neq -1/2$.

**3.** Je dán čtverec o straně délky $a$. Do něho je vepsán čtverec tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran daného čtverce; takto vzniklému čtverci je opět vepsán čtverec s vrcholy ve středech stran předchozího čtverce; atd. Postup se stále opakuje. Rozhodněte, zda platí:

(a) Součet obsahů všech takto vzniklých čtverců je $4a^2$.
(b) Obvod 4. čtverce je čtvrtina obvodu 2. čtverce.
(c) Součet obvodů všech takto vzniklých čtverců je větší než $8a$.
(d) Součet obvodů všech takto vzniklých čtverců je větší než $12a$.
(e) Obsah 5. čtverce je polovinou obsahu 4. čtverce.

**4.** Nechť $M$ je množina všech řešení rovnice

$$\sin\left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$$

v oboru reálných čísel. Rozhodněte o platnosti následujících výroků:

(a) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
(b) Pokud $x \in M$, pak $(x + \pi) \in M$.
(c) Pokud $x \in M$, pak $(x + 2\pi) \in M$.
(d) Pokud $x \in M$, pak $2x \in M$.
(e) Pokud $x \in M$, pak $9x \in M$.

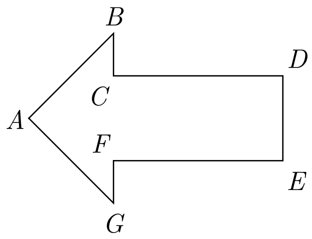
**5.** Označme $x = \log_5 \frac{1}{25} - (\log_{\frac{1}{3}} 9)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 4^2$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) $x = -10$
(b) $x \geq -2$
(c) $x = 2$
(d) $x \leq 6$
(e) $x = 10$

**6.** Jsou dány body $K[2;5]$ a $L[6;2]$. Určete souřadnice bodů $M$ a $N$ tak, aby čtyřúhelník $KLMN$ byl obdélník a aby platilo $|KL| = 3|LM|$. Vrcholy ve čtyřúhelníku se označují proti směru pohybu hodinových ručiček. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Bod $M$ má souřadnice $[7; \frac{11}{3}]$.
(b) Bod $N$ má souřadnice $[3; \frac{22}{3}]$.
(c) Bod $N$ má souřadnice $[3; \frac{19}{3}]$.
(d) $|LM| = \frac{5}{3}$
(e) Obsah obdélníku $KLMN$ je $\frac{25}{3}$.

**7.** V rovině je sestrojen sedmiúhelník $ABCDEFG$, kde úhly u vrcholů $A$, $C$, $D$, $E$, $F$ jsou pravé a platí $|BC| = |FG| = 5$ cm, $|CD| = |EF| = 20$ cm, $|DE| = 10$ cm, $|AB| = |AG|$ (viz obrázek).




Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) $|AB| = 10\sqrt{2}$ cm.
(b) Obvod sedmiúhelníku je $(70 + 20\sqrt{2})$ cm.
(c) Obsah trojúhelníku $ABG$ je 100 cm$^2$.
(d) Obsah sedmiúhelníku je $(10\sqrt{2} + 200)$ cm$^2$.
(e) Vzdálenost bodů $A$, $F$ je $5\sqrt{5}$ cm.

**8.** Označme jako $X$ počet různých přirozených čtyřciferných čísel s navzájem různými ciframi, která lze sestavit z cifer $0, 1, 2, 4, 6, 7$. Označme jako $Y$ počet těch z nich, která jsou sudá. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

(a) $X > 300$
(b) $Y > 200$
(c) $Y = 2X/3$
(d) $X$ je dělitelné deseti.
(e) $Y$ je dělitelné třemi.

**9.** Uvažujme mnohočlen $(1 + 2x - x^2)^{10}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Mnohočlen má stupeň 12.
(b) Mnohočlen má stupeň 20.
(c) Mnohočlen má aspoň jeden záporný kořen.
(d) Mnohočlen nemá žádný celočíselný kořen.
(e) Součet každých dvou různých kořenů je kladný.

**10.** Hráč opakovaně hází kostkou a sčítá dosažené body, hra končí v okamžiku, kdy je součet dosažených bodů větší nebo roven $4$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Pravděpodobnost, že hráč skončí hru se součtem $5$ je ostře větší než pravděpodobnost, že ji skončí se součtem $6$.

(b) Pravděpodobnost, že hráč skončí hru se součtem $6$ je ostře větší než pravděpodobnost, že ji skončí se součtem $7$.

(c) Pravděpodobnost, že hra skončí se součtem nejvýše $9$ je jedna.

(d) Pravděpodobnost, že hra skončí po právě dvou hodech je alespoň $1/3$.

(e) Pravděpodobnost, že hra skončí po více než dvou hodech je alespoň $1/3$.

# Přijímací zkouška na MFF UK

## pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

## 2018, varianta B

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

**Bodování.** Za každou úlohu je možno získat $0$ až $10$ bodů. Za každou dobře označenou[1] odpověď získáte $+2$ body, za každou špatně označenou odpověď $-2$ body, za otázku bez odpovědi $0$ bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni $0$ body.

**Způsob označování a korekce.** Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupečky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

**Příklad.** Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtání odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

| | | Odpovědi | | | Odpovědi | | | Odpovědi | | | Odpovědi | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Ano | Ne | | Ano | Ne | | Ano | Ne | | Ano | Ne | |
| (a) | 2 | ● | ○ | (+2) | ● | ○ | (+2) | ○ | ○ | (0) | ○ | ○ | (0) |
| (b) | 3 | ○ | ● | (+2) | ○ | ○ | (0) | ○ | ● | (+2) | ⊗ | ● | (+2) |
| (c) | Méně než 12 | ● | ○ | (+2) | ○ | ● | (−2) | ○ | ○ | (0) | ⊗ | ○ | (0) |
| (d) | Kladné číslo | ● | ○ | (+2) | ○ | ○ | (0) | ○ | ● | (−2) | ⊗ | ● | (−2) |
| (e) | 1 | ○ | ● | (+2) | ● | ○ | (−2) | ○ | ● | (+2) | ⊗ | ● | (+2) |
| Bodů: | | **10** | | | **0** | | | **2** | | | **2** | | |

[1] Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

**1.** Uvažujme funkci $f(x) = \sin(x^2)$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Funkce $f$ je sudá.
(b) Funkce $f$ je lichá.
(c) Funkce $f$ je periodická.
(d) Funkce $f$ je rostoucí.
(e) Funkce $f$ je prostá.

**2.** Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $px - \frac{2}{p^2} = \frac{1}{p}(4x+1)$ s parametrem $p \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda platí:

(a) Pro $p = 2$ nemá rovnice žádný kořen.
(b) Pro $p \neq 0$ a $p \neq -2$ má rovnice řešení $x = \frac{1}{p(p+2)}$.
(c) Rovnice má jediný kořen $x = \frac{1}{p(p-2)}$ pro každé $p \in \mathbb{R}$.
(d) Pro $|p| = 2$ nemá rovnice řešení.
(e) Existuje $p \in \mathbb{R}$, pro které je každé $x \in \mathbb{R}$ řešením rovnice.

**3.** Nad výškou rovnostranného trojúhelníku o straně délky $a$ je sestrojen rovnostranný trojúhelník (výška původního trojúhelníku je jeho stranou). Nad výškou nového rovnostranného trojúhelníku je opět sestrojen rovnostranný trojúhelník; atd. Postup se stále opakuje. Rozhodněte, zda platí:

(a) Obsahy trojúhelníků tvoří aritmetickou posloupnost.
(b) Součet obsahů všech trojúhelníků je menší než $2a^2$.
(c) Pro obvod $n$-tého trojúhelníku $O_n$ platí $O_n = \frac{3}{4}O_{n-2}$.
(d) Součet obsahů všech trojúhelníků je menší než $1{,}5a^2$.
(e) Obvod 5. trojúhelníku je polovinou obvodu 1. trojúhelníku.

**4.** Nechť $M$ je množina všech řešení rovnice

$$\ln((\sin x)^2 + \sin x - 1) = \ln(\sin x)$$

v oboru reálných čísel. ($\ln$ je přirozený logaritmus.) Rozhodněte o platnosti následujících výroků:

(a) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
(b) Pokud $x \in M$, pak $(x + \pi) \in M$.
(c) Pokud $x \in M$, pak $(x + 2\pi) \in M$.
(d) Pokud $x \in M$, pak $2x \in M$.
(e) Pokud $x \in M$, pak $5x \in M$.

**5.** Určete všechna čísla $x$, $y \in R$ tak, aby byla řešením soustavy

$$2 \cdot 2^{x-y} + 2^{x+y-1} = 20$$
$$10 \cdot 2^{x-y-1} - 2^{x+y} = -22$$

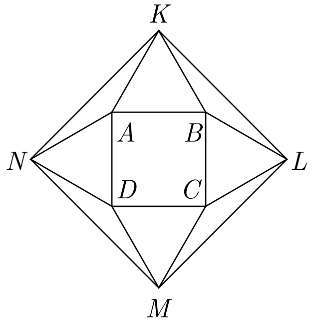
Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Soustava má více než jedno řešení.
(b) Pro každé řešení je $x > y$.
(c) $x = 3$
(d) Existuje řešení s $y < 0$.
(e) $y = 4$

**6.** Jsou dány body $A[4;1]$, $S[6;2]$. Určete souřadnice bodů $B$, $C$, $D$ tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl čtverec. Bod $S$ je střed čtverce. Vrcholy ve čtverci se označují proti směru pohybu hodinových ručiček. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Bod $B$ má souřadnice $[7;0]$.
(b) Bod $C$ má souřadnice $[8;3]$.
(c) Bod $D$ má souřadnice $[5;4]$.
(d) $|BD| = 2\sqrt{5}$
(e) Obsah čtverce $ABCD$ je $10$.

**7.** V rovině je sestrojen čtverec $ABCD$ o obsahu $16$ cm$^2$. Nad jeho stranami jsou zkonstruovány rovnostranné trojúhelníky, jejichž zbývající vrcholy jsou označeny $K$, $L$, $M$, $N$ (viz obrázek).




Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) $|KM| = (4 + 4\sqrt{3})$ cm.
(b) $|KL| = (2\sqrt{2} + 2\sqrt{6})$ cm.
(c) Obsah čtverce $KLMN$ je $(32 + 32\sqrt{3})$ cm$^2$.
(d) Obvod čtverce $KLMN$ je $32$ cm.
(e) Vzdálenost bodů $K$, $D$ je $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm.

**8.** Označme jako $Z$ počet různých přirozených čtyřciferných čísel, která jsou dělitelná čtyřmi a lze je sestavit z cifer $1, 5, 6, 8, 9$. V uvažovaných číslech se přitom mohou opakovat stejné cifry. Označme jako $T$ počet těch z nich, která jsou tvořena navzájem různými ciframi. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

(a) $Z > 100$
(b) $T > 50$
(c) $T < Z/5$
(d) $Z$ je sudé.
(e) $T$ je dělitelné pěti.

**9.** O neznámém celém čísle $x$ víme, že hodnota výrazu $\frac{x^3-4x^2-4x+6}{x-5}$ je celé číslo. Rozhodněte, zda platí:

(a) Existuje právě jedno $x$ s touto vlastností.
(b) Existuje nekonečně mnoho $x$ s touto vlastností.
(c) Pro každé $x$ s touto vlastností je hodnota výrazu kladné číslo.
(d) Pro každé $x$ s touto vlastností je $|x|$ dělitelné $11$.
(e) Pro každé $x$ s touto vlastností je $|x|$ sudé.

**10.** Označme jako $M$ množinu všech posloupností jedniček a nul, které se skládájí z $4$ nul a $6$ jedniček. Rozhodněte o platnosti následujících výroků:

(a) $M$ má více než $250$ prvků.
(b) Počet prvků $M$ je dělitelný třemi.
(c) $M$ obsahuje stejný počet posloupností začínajících nulou a posloupností začínajících jedničkou.
(d) Různých osmiznakových posloupností získaných smazáním posledních dvou znaků z posloupností z množiny $M$ je více než $150$.
(e) $M$ obsahuje méně než $25$ posloupností, kde jsou na prvních čtyřech místech tři nuly a jedna jednička (v libovolném pořadí).

| **varianta A** | **varianta B** |
| --- | --- |
| 1 N A N A A | 1 A N N N N |
| 2 N N N N A | 2 A N N N A |
| 3 N N A A A | 3 N A A N N |
| 4 N N A N A | 4 N N A N A |
| 5 A N N A N | 5 N A A N N |
| 6 N N A A A | 6 A A A A A |
| 7 A N A N A | 7 A A N N A |
| 8 N A N A A | 8 A N A N N |
| 9 N A A A A | 9 N N A N A |
| 10 N A A A N | 10 N A N A A |