

Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2017, varianta A

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 0 až 10 bodů. Za každou dobře označenou¹ odpověď získáte +2 body, za každou špatně označenou odpověď –2 body, za otázku bez odpovědi 0 bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni 0 body.

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupčky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnutí odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi			Odpovědi			Odpovědi			Odpovědi		
		Ano	Ne		Ano	Ne		Ano	Ne		Ano	Ne	
(a)	2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)
(b)	3	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
(c)	Méně než 12	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)
(d)	Kladné číslo	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)
(e)	1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
Bodů:		10			0			2			2		

¹Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Uvažujme funkci reálné proměnné danou předpisem $f(x) = (\sin x)^2 \cos x$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Funkce f je sudá.
- (b) Funkce f je lichá.
- (c) Funkce f je periodická.
- (d) Funkce f je rostoucí.
- (e) Funkce f je prostá.

2. Označme $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) $x^2 > x$
- (b) $x^2 < 2$
- (c) $x^2 < 3$
- (d) $x^3 - 2x > 1$
- (e) $x^3 - 2x$ je celé číslo.

3. Mějme rovnici $2|x^2 - 2x| + 3x - 3 = 0$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Rovnice má více než dvě řešení.
- (b) Alespoň jedno řešení rovnice je záporné číslo.
- (c) Všechna řešení rovnice jsou celá čísla.
- (d) Součet všech řešení rovnice je kladné číslo.
- (e) Rozdíl největšího a nejmenšího řešení rovnice je 4.

4. Určete čtyři čísla tak, aby první tři tvořila tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -3$ a poslední tři tvořila tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 1/2$.

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Úloha má více než jedno řešení.
- (b) Existuje řešení, kde jsou všechna čtyři čísla celá.
- (c) Existuje řešení, pro které je součet všech čtyř čísel 19,5.
- (d) Existuje řešení, pro které je podíl prvního a čtvrtého čísla roven druhému číslu.
- (e) Pro každé řešení platí, že součin prvního a čtvrtého čísla je menší než součin druhého a třetího čísla.

5. Určete, kolik existuje různých kvádrů, jejichž délky hran jsou navzájem různá kladná celá čísla nejvýše rovná 10. Kvádry, které se liší pouze natočením v prostoru, nepovažujeme za různé. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Tento počet je menší než 100.
- (b) Tento počet je menší než 200.
- (c) Tento počet je menší než 500.
- (d) Tento počet je menší než 800.
- (e) Tento počet je dělitelný patnácti.

6. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic s reálným parametrem p :

$$\begin{aligned}x - y &= 2 \\ px + y &= 4\end{aligned}$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Soustava má právě jedno řešení pro každé $p \neq -1$.
- (b) Pro $p = 2$ soustava nemá řešení.
- (c) Pro každé $p > 1$ splňuje řešení (x, y) podmínky $x \geq 0$ a $y \leq 0$.
- (d) Soustava má právě jedno řešení pro každé $p \in \mathbb{R}$.
- (e) Pro $p = 0$ existuje řešení splňující podmínky $x \geq 0$ a $y \geq 0$.

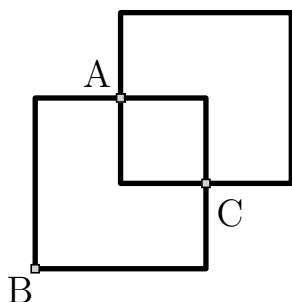
7. Nechť M je množina všech řešení rovnice

$$\sin |x| - \cos^2 x + 1 = 0$$

v oboru reálných čísel. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
- (b) Pokud $x \in M$, pak $(x + \pi) \in M$.
- (c) Pokud $x \in M$, pak $(x + 2\pi) \in M$.
- (d) M je konečná.
- (e) Pokud $x \in M$, pak $5x \in M$.

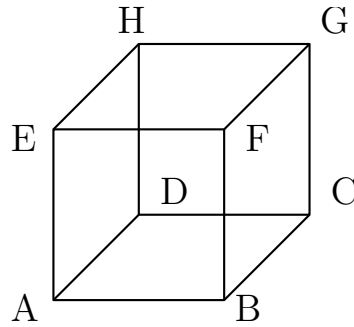
8. Na obrázku je plán města. Poštovní vůz musí projet všemi ulicemi, každou právě jednou (lhostejno v jakém směru), a pak se vrátit do výchozího místa. Vůz se nemůže otáčet do protisměru. V bodech A , C může pokračovat libovolnou dosud neprojetou ulicí.



Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Pokud vůz vyjíždí z bodu A , má alespoň 20 možných variant trasy.
- (b) Pokud vůz vyjíždí z bodu A , má nejvýše 20 možných variant trasy.
- (c) Pokud vůz vyjíždí z bodu B , má alespoň 20 možných variant trasy.
- (d) Pokud vůz vyjíždí z bodu B , má nejvýše 20 možných variant trasy.
- (e) Pokud vůz vyjíždí z bodu B , má nejvýše 12 možných variant trasy.

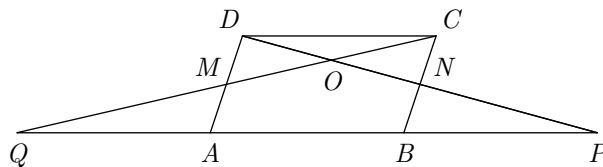
9. Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky 4.



Rozhodněte, zda platí:

- (a) Vzdálenost vrcholů A a G je $4\sqrt{3}$.
- (b) Vzdálenost vrcholu A a středu úsečky GH je 6.
- (c) Vzdálenost vrcholu B a středu úsečky AH je $4\sqrt{2}$.
- (d) Vzdálenost středu úsečky AC a středu úsečky CG je $3\sqrt{2}$.
- (e) Vzdálenost středu úsečky BG a středu úsečky AF je $2\sqrt{2}$.

10. Rovnoběžník $ABCD$ má jednotkový obsah. Středy stran AD a BC jsou označeny M , N . Přímkou CM a DN se protínají v bodě O , zatímco jejich průsečíky s přímkou AB jsou označeny Q , P (viz obrázek).



Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- (a) Obsah pětiúhelníku $ABNOM$ je $\frac{3}{4}$.
- (b) Obsah pětiúhelníku $ABNOM$ je $\frac{5}{8}$.
- (c) Obsah trojúhelníku OPQ je $\frac{9}{8}$.
- (d) Obsah trojúhelníku OPQ je $\frac{5}{4}$.
- (e) Obsah šestiúhelníku $QPNCDM$ je $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Řešení úloh

1. Správné odpovědi: a, c.
2. Úpravou x^2 zjistíme, že $x^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = x + 1$. Odsud zbytek snadno ($x^3 - 2x = 1$).
Správné odpovědi: a, c, e.
3. Řešením jsou čísla $-1, 1/2$.
Správné odpovědi: b.
4. Jediné řešení je $9, 6, 3, 3/2$.
Správné odpovědi: c, d, e.
5. Počet možností je $\binom{10}{3} = 120$.
Správné odpovědi: b, c, d, e.
6. Sečtením obou rovnic dostáváme $(p + 1)x = 6$. Odsud získáme právě jedno řešení, pokud $p + 1 \neq 0$.
Správné odpovědi: a, e.
7. Buď $x \geq 0$ a $\sin x \in \{0, -1\}$ nebo $x \leq 0$ a $\sin x \in \{0, 1\}$. Odsud $M = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{N}\} \cup \{-\frac{3}{2}\pi - 2k\pi : k \in \mathbb{N}\}$.
Správné odpovědi: a, e.
8. Při startu z A je počet možností $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, z B jen $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.
Správné odpovědi: a, d, e.
9. Vzdálenost v části c je $2\sqrt{6}$, v části d $2\sqrt{3}$. Správné odpovědi: a, b, e.
10. Použitím vlastností rovnoběžníka zjistíme, že trojúhelník MNO má obsah $1/8$. Odsud snadno zjistíme ostatní.
Správné odpovědi: b, c.

Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2017, varianta B

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 0 až 10 bodů. Za každou dobře označenou¹ odpověď získáte +2 body, za každou špatně označenou odpověď –2 body, za otázku bez odpovědi 0 bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni 0 body.

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupčky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnutí odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi			Odpovědi			Odpovědi			Odpovědi		
		Ano	Ne		Ano	Ne		Ano	Ne		Ano	Ne	
(a)	2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)
(b)	3	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
(c)	Méně než 12	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)
(d)	Kladné číslo	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)
(e)	1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
Bodů:		10			0			2			2		

¹Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Uvažujme funkci reálné proměnné danou předpisem $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Funkce f je sudá.
- (b) Funkce f je lichá.
- (c) Funkce f je periodická.
- (d) Funkce f je rostoucí.
- (e) Funkce f je prostá.

2. Označme x_1, x_2 kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 3x + 1 = 0$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) $x_1 + x_2 > 0$
- (b) $x_1 + x_2 > 3$
- (c) $x_1 + x_2$ je celé číslo.
- (d) $x_1 \cdot x_2$ je celé číslo.
- (e) $x_1 \cdot x_2 > 0$

3. Mějme rovnici $|2|x+1| + 2x - 10| + x - 7 = 0$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Rovnice má více než 1 řešení.
- (b) Alespoň 1 řešení rovnice je záporné číslo.
- (c) Alespoň 1 řešení rovnice není celé číslo.
- (d) Součet všech řešení rovnice je kladné číslo.
- (e) Součin všech řešení rovnice je celé číslo.

4. Pro jisté dvě aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ platí, že

- $a_1 = 25$,
- $b_1 = 75$,
- $a_{10} + b_{10} = 1900$.

Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- (a) Ze zadaných údajů plyne, že $a_{10} = 925$, $b_{10} = 975$.
- (b) Čísla a_{10} , b_{10} nelze ze zadaných údajů jednoznačně určit.
- (c) Posloupnost $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s diferencí 200.
- (d) Součet prvních deseti členů posloupnosti $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ je větší než 8000.
- (e) Součet prvních deseti členů posloupnosti $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ nelze ze zadaných údajů jednoznačně určit.

5. Petr a Pavel sestavují týmy na fotbal – musí si mezi sebe rozdělit 8 hráčů, takže vytvoří dvě pětičlenná mužstva. Označme z počet způsobů, kterými to lze učinit. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) $z > 40$
- (b) $z > 60$
- (c) $z > 80$
- (d) z je sudé.
- (e) z je dělitelné třemi.

6. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic s reálným parametrem p :

$$px + y = 1$$

$$x + py = 1$$

- (a) Existuje p , pro které soustava nemá řešení.
- (b) Existuje p , pro které má soustava nekonečně mnoho řešení.
- (c) Pro každé $p \geq 0$ má soustava právě jedno řešení (x, y) a platí $x = y$.
- (d) Pro $p > 1$ platí $xy = (p + 1)^{-2}$.
- (e) Pro $p = 1$ soustava nemá řešení.

7. Nechť M je množina všech řešení rovnice

$$e^{3 \ln(\sin x)} = \sin x$$

v oboru reálných čísel (\ln je přirozený logaritmus).

- (a) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
- (b) Pokud $x \in M$, pak $(x + \pi) \in M$.
- (c) Pokud $x \in M$, pak $(x + 2\pi) \in M$.
- (d) Pokud $x \in M$, pak $2x \in M$.
- (e) Pokud $x \in M$, pak $5x \in M$.

8. Trojúhelník ABC je zadán svými vrcholy $A[-3; -2]$, $B[1; 1]$, $C[0; -6]$.

Rozhodněte, zda platí:

- (a) Trojúhelník ABC je rovnostranný.
- (b) Trojúhelník ABC je rovnoramenný.
- (c) Trojúhelník ABC je pravouhlý.
- (d) Těžiště trojúhelníka ABC má souřadnice $[-1; -2]$.
- (e) Strana AB má délku 5.

9. Uvažujme čtyřstěn $ABCD$, kde stěna ABC je rovnostranný trojúhelník o straně délky 6, zatímco všechny ostatní hrany čtyřstěnu mají délku $\sqrt{15}$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- (a) Stěna ABC má obsah $2\sqrt{3}$.
- (b) Stěna ABC má obsah $3\sqrt{3}$.
- (c) Výška čtyřstěnu procházející vrcholem D je delší než 1,5.
- (d) Objem čtyřstěnu je $\frac{27}{4}$.
- (e) Objem čtyřstěnu je 9.

10. V trojúhelníku ABC má úhel u vrcholu C velikost $\gamma = 140^\circ$. Velikosti úhlů u vrcholů A , B označme α , β . Na úsečce AB je zvolen bod D (různý od A , B) a na úsečce AC bod E (různý od A , C). Víme, že úsečky AE , ED , DC , CB jsou stejně dlouhé. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- (a) $\alpha = \beta$
- (b) Hodnoty α , β nelze ze zadaných údajů jednoznačně určit.
- (c) Trojúhelník CDE je pravouhlý.
- (d) $\beta - \alpha = 20^\circ$
- (e) $\beta = 3\alpha$

Řešení úloh

1. Správné odpovědi: a.
2. Vyřešením rovnice nebo z Vietových vzorců snadno zjistíme $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 \cdot x_2 = 1$.
Správné odpovědi: a, c, d, e.
3.
Správné odpovědi: a, b, c, e.
4.
Správné odpovědi: b, c, d.
5. Počet možností je $\binom{8}{4} = 70$.
Správné odpovědi: a, b, d.
6.
Správné odpovědi: a, b, d.
7. Musí být $\sin x = 1$. Odsud $M = \{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
Správné odpovědi: c, e.
8.
Správné odpovědi: b, c, e.
9.
Správné odpovědi: c, e.
10.
Správné odpovědi: d, e.