Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2016

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIT, MMFT, MSTR, MNVM, MPMSE

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Příklad 1 (25 bodů)

- Sečtěte $\sum_{k=1}^{n^n} k$.
- S použitím věty o dvou policajtech spočtěte limitu posloupnosti a_n pro n jdoucí do nekonečna, kde

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\sum_{k=1}^{n^n} k}{\sum_{k=1}^{2n} k^k}}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

- Rozhodněte, zda množina bodů $[x, y, z, w] \in \mathbb{R}^4$, které splňují vztah

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4w^2 = 10xyzw$$

  je v okolí bodu $[1, 1, 1, 1]$ popsatelná jako graf spojitě diferencovatelné funkce $f(x, z, w)$ $(f(x, z, w) = y)$ definované na jistém okolí bodu $[1, 1, 1]$, pro kterou je $f(1, 1, 1) = 1$.
- Spočtěte parciální derivaci složené funkce $T(x, z, w) = f(f(x, z, w), f(x, z, w), f(x, z, w))$ podle z v bodě $[1, 1, 1]$.

Pokud používáte větu o implicitních funkcích, tak ověřte její předpoklady.

Příklad 3 (25 bodů)

Spočítejte integrál

$$\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}}.$$

Použijte substituci $x = 2\,\mathrm{tg}(y)$.

Příklad 4 (25 bodů)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ uvažujme vektory

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ a+3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} b \\ b-2a \\ 2b-1 \\ 2b-4 \end{pmatrix}.$$

(i) Najděte všechny dvojice $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, pro které je posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ lineárně závislá.

(ii) V případech, kdy to jde, vyjádřete každý z vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ jako lineární kombinaci ostatních dvou.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2016

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MA, MMIT, MMFT, MSTR, MNVM, MPMSE

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

- Jedná se o součet aritmetické posloupnosti. Tedy

$$\sum_{k=1}^{n^n} k = \frac{1}{2}(n^n+1)n^n.$$

- Budeme používat větu o dvou policajtech. Využijeme následující odhady pro $n \in \mathbb{N}$

$$(2n)^{2n} \leq \sum_{k=1}^{2n} k^k \leq 2n(2n)^{2n},$$

$$\frac{1}{2}n^{2n} \leq \frac{1}{2}(n^n+1)n^n \leq n^{2n}.$$

Tedy

$$\frac{1}{4}\sqrt[n]{\frac{1}{4n}} = \sqrt[n]{\frac{\frac{1}{2}n^{2n}}{2n(2n)^{2n}}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(2n)^{2n}}} = \frac{1}{4}.$$

Víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4n}} = 1.$$

Z věty o dvou policajtech a výše zmíněných odhadů a výpočtů plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

(1) Ověříme předpoklady věty o implicitních funkcích pro vztah

$$F(x, y, z, w) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4w^2 - 10xyzw = 0$$

a bod $[1, 1, 1, 1]$.

- F je polynom, tedy $F \in C^1(\mathbb{R}^4)$.
- $F(1, 1, 1, 1) = 0$.
- $F_y(1, 1, 1, 1) = -6 \neq 0$, tedy f existuje a je C^1.

(2)

$$f_x(1, 1, 1) = -\frac{F_x(1, 1, 1, 1)}{F_y(1, 1, 1, 1)} = -\frac{4}{3},$$

$$f_z(1, 1, 1) = -\frac{F_z(1, 1, 1, 1)}{F_y(1, 1, 1, 1)} = -\frac{2}{3},$$

$$f_w(1, 1, 1) = -\frac{F_w(1, 1, 1, 1)}{F_y(1, 1, 1, 1)} = -\frac{1}{3}.$$

Použitím řetízkového pravidla dostáváme

$$T_z(1, 1, 1) = ((f_x + f_z + f_w) f_z)(1, 1, 1) = \frac{14}{9}.$$

Příklad 3 (25 bodů)

Integrační obor je kompaktní, integrand je na něm spojitý, integrál tudíž existuje. Použijeme substituci $x = \varphi(y)$, kde

$$\varphi(y) = 2\operatorname{tg} y, \quad \varphi'(y) = \frac{2}{\cos^2 y}.$$

Tato substituce je korektní, neboť φ je zřejmě spojitě diferencovatelná, prostá na $[\pi/4, \pi/3]$ a $\varphi((\pi/4, \pi/3)) = (2, 2\sqrt{2})$. Integrál je tedy roven

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{4\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}\sqrt{4 + 4\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}}} \cdot \frac{2}{\cos^2 y} dy = \frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos y}{\sin^2 y} dy.$$

Nyní použijeme substituci

$$\psi(y) = \sin y, \quad \psi'(y) = \cos y,$$

která je opět korektní, neboť ψ je na $[\pi/4, \pi/3]$ spojitě diferencovatelná a prostá. Dostáváme tak

$$\frac{1}{4}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{z}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Příklad 4 (25 bodů)

K vyřešení obou úkolů nejprve upravíme rovnost $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$. Pro pevné parametry a, b je tato rovnost ekvivalentní soustavě lineárních rovnic, kterou upravíme elementárními řádkovými úpravami.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & b & 0 \\ 1 & a+3 & b-2a & 0 \\ 2 & 7 & 2b-1 & 0 \\ 1 & 5 & 2b-4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & b & 0 \\ 0 & a & -2a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & b-4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & 0 \end{array}\right)$$

(i) Posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je lineárně závislá právě tehdy, když má rovnice $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$ netriviální řešení $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Z upravené soustavy vidíme, že to nastane právě tehdy, když $a = 0$ a $b = 2$. Jediná dvojice, pro které je daná posloupnost lineárně závislá je tedy $(a, b) = (0, 2)$.

(ii) Je-li jeden z daných vektorů lineární kombinací ostatních, pak je nutně posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ lineárně závislá. Hledané vyjádření tedy neexistuje, pokud $(a, b) \neq (0, 2)$. V případě $(a, b) = (0, 2)$ je jedním z řešení soustavy trojice $(x, y, z) = (-5, 1, 1)$, čili platí $-5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$. Z toho dostáváme

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{5}\mathbf{v}_3, \ \mathbf{v}_2 = 5\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, \ \mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$