Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

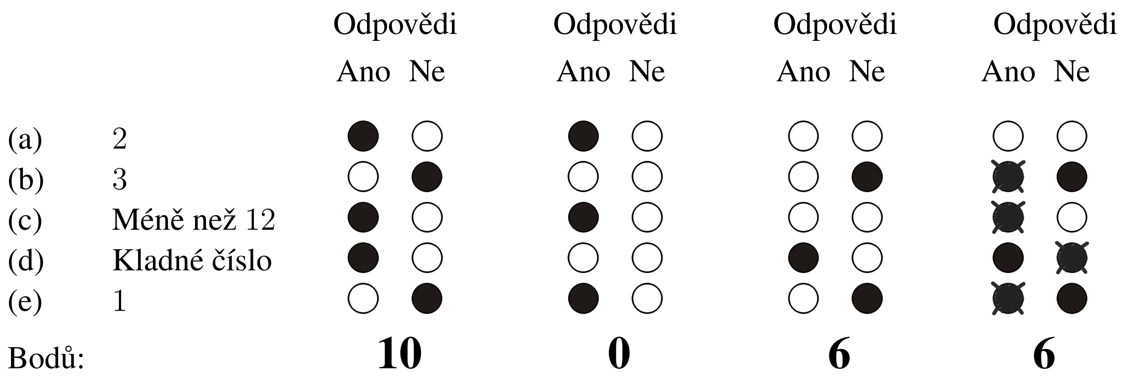
2016, varianta A

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 10 bodů. Tento plný počet bodů získáte za úlohy, u kterých dobře označíte[1] u každé z pěti nabízených odpovědí, zda je správná či chybná. Za každou úlohu, ve které označíte jednu či více odpovědí špatně, získáte 0 bodů, bez ohledu na počet dobře označených odpovědí. U úloh, ve kterých neoznačíte žádnou odpověď špatně, dostanete za každou dobře označenou odpověď 2 body (v případě pěti dobře označených odpovědí tedy plný počet 10 bodů).

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupečky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtání odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:



[1] Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Uvažujme funkci $f(x) = e^{\sin x}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Funkce f je sudá.
(b) Funkce f je lichá.
(c) Funkce f je periodická.
(d) Funkce f je rostoucí.
(e) Funkce f je prostá.

2. Rozhodněte, které z následujících výroků o čísle

$$x = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{3\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

jsou pravdivé:

(a) x je větší než 1.
(b) x je racionální číslo.
(c) $x = \frac{4}{3}$
(d) $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
(e) $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. Alžběta, Blanka, Cecilka, Diana, Eva, Filip, Gustav, Honza a Igor se chtějí seřadit do fronty na oběd. Označme b počet možností, jak se mohou seřadit do fronty tak, aby všechna děvčata stála před všemi chlapci. Dále označme a počet možností, kde je navíc Alžběta první.

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) $b > 4a$
(b) a je druhá mocnina přirozeného čísla.
(c) $\sqrt{a} > 25$
(d) $\sqrt{a} > 35$
(e) $b > 3000$

4. Prvních šest členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje následující dvě podmínky:

$$a_1 - a_2 + a_3 = 9$$
$$a_4 - a_5 + a_6 = 72$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Součet $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ je větší než 180.
(b) $a_6 > 100$
(c) $a_5 = 48$
(d) $a_2 = 2$
(e) $a_1 + a_6 < 100$

5. Nechť M je množina všech řešení rovnice

$$\ln(\operatorname{tg} x) = \ln(\operatorname{cotg} x)$$

v oboru reálných čísel ($\ln$ značí přirozený logaritmus). Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
(b) Pokud $x \in M$, pak $(x + \pi/2) \in M$.
(c) Pokud $x \in M$, pak $(x + \pi) \in M$.
(d) Pokud $x \in M$, pak $3x \in M$.
(e) Pokud $x \in M$, pak $5x \in M$.

6. Pro reálné číslo a označme M_a množinu všech řešení rovnice

$$ax^3 - a^2|x| = 0$$

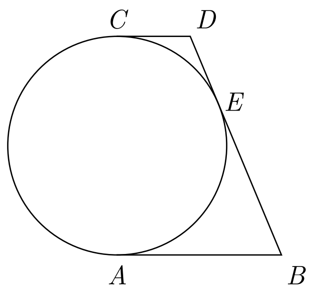
v oboru reálných čísel. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je jednoprvková.
(b) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je dvouprvková.
(c) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je tříprvková.
(d) Existuje reálné číslo a tak, že M_a má více než tři prvky.
(e) Pro každé reálné číslo b existuje reálné číslo a tak, že $M_a \cap (-\infty, b\rangle$ obsahuje právě jeden prvek.

7. Parabola P1 je zadaná rovnicí $y = 2x^2 - 5x + 2$, parabola P2 je zadaná rovnicí $y = 7x^2 + 5x + 7$. Rozhodněte, zda platí:

(a) Paraboly P1 a P2 se protínají ve dvou bodech.
(b) Paraboly P1 a P2 mají alespoň jeden společný bod.
(c) Parabola P1 protíná osu x.
(d) Parabola P2 protíná osu x.
(e) Vrchol paraboly P1 má kladnou x-ovou souřadnici.

8. K jisté kružnici jsou sestrojeny dvě rovnoběžné tečny AB a CD tak, jak ukazuje obrázek (A, C jsou body dotyku). Délka úsečky AB je 9 a délka úsečky CD je 4. Úsečka BD se dané kružnice dotýká v bodě E.



Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Poloměr kružnice je větší než 6.
(b) Poloměr kružnice nelze ze zadaných údajů určit.
(c) Délka úsečky BD je 13.
(d) Obsah čtyřúhelníku $ABDC$ je 39.
(e) Trojúhelník CDE je rovnoramenný.

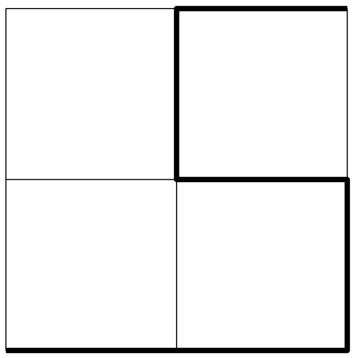
9. Máme čtyři karty a víme, že na každé z nich je z jedné strany napsáno jedno písmeno a z druhé strany jedno celé číslo. Karty leží na stole a vidíme na nich postupně:

E	6	K	9

Spodní strany karet nevidíme. Pavel tvrdí, že pro karty platí následující pravidlo: „Jestliže je na kartě napsaná samohláska, potom je na ní z druhé strany sudé číslo.“ Které z těchto čtyř karet musíme otočit a zkontrolovat z druhé strany, abychom ověřili platnost Pavlova tvrzení?

(a) Musíme otočit všechny čtyři karty.
(b) Musíme otočit libovolné dvě karty.
(c) Musíme otočit první dvě karty.
(d) Musíme otočit obě karty, na kterých vidíme písmena.
(e) Musíme otočit první a poslední kartu.

10. Zkoumejme cesty v mřížce 2×2 z levého dolního do pravého horního rohu. Cesty vedou po hranách čtverečků a nesmějí procházet žádným bodem více než jednou. Na obrázku je vyznačena jedna taková cesta o délce 6.



Označme C_k počet takových cest o délce k. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) $C_4 > 5$
(b) $C_5 > 4$
(c) $C_6 > 4$
(d) $C_8 < 4$
(e) $C_8 > 4$

Řešení úloh

1. Správné odpovědi: c.

2. Prozkoumáním x^2 snadno zjistíme, že $x = 4/3$.
Správné odpovědi: a, b, c.

3. Přímočará kombinatorika nám dává $b = 5! \cdot 4! = 120 \cdot 24$ a $a = 4!^2 = 24^2$.
Správné odpovědi: a, b.

4. Posloupnost začíná 3, 6, 12, 24, 48, 96.
Správné odpovědi: a, c, e.

5. Řešení jsou všechna čísla $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ pro k celé.
Správné odpovědi: c, e.

6. Rovnici je snadné vyřešit, pokud rozlišíme tři případy: $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$.
Správné odpovědi: b, d, e.

7. Několikerým řešením kvadratické rovnice zjistíme, že společný bod parabol je jediný o souřadnicích $[-1, 9]$, parabola P_1 protíná osu x v bodech $(5 \pm 9)/4$, zatímco P_2 osu x neprotíná.
Správné odpovědi: b, c, e.

8. Přikreslíme-li patu výšky z bodu D na úsečku AB a použijeme Pythagorovu větu, zjistíme snadno, že poloměr kružnice je 6.
Správné odpovědi: c, e.

9. Musíme ověřit kartu s E (zda je na druhé straně opravdu sudé číslo) a s 9 (zda na druhé straně není samohláska – to by tvrzení také neplatilo).
Správné odpovědi: e.

10. $C_4 = \binom{4}{2} = 6$ (mezi čtyřmi pohyby musíme rozhodnout, které dva jsou nahoru a které dva doprava), $C_5 = 0$ (cesta nemůže mít lichou délku), konečně snadný rozbor možností dává $C_6 = 4$ a $C_8 = 2$.
Správné odpovědi: a, d.

Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

2016, varianta B

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

Bodování. Za každou úlohu je možno získat 10 bodů. Tento plný počet bodů získáte za úlohy, u kterých dobře označíte[1] u každé z pěti nabízených odpovědí, zda je správná či chybná. Za každou úlohu, ve které označíte jednu či více odpovědí špatně, získáte 0 bodů, bez ohledu na počet dobře označených odpovědí. U úloh, ve kterých neoznačíte žádnou odpověď špatně, dostanete za každou dobře označenou odpověď 2 body (v případě pěti dobře označených odpovědí tedy plný počet 10 bodů).

Způsob označování a korekce. Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupečky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

Příklad. Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtání odpovědí v úloze „Výsledek úlohy $1 + 1$ je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi	
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne
(a)	2	●	○	●	○	○	○	○	○
(b)	3	○	●	○	○	○	●	~~●~~	●
(c)	Méně než 12	●	○	●	○	○	○	~~●~~	○
(d)	Kladné číslo	●	○	○	○	●	○	●	~~●~~
(e)	1	○	●	●	○	○	●	~~●~~	●
Bodů:		**10**		**0**		**6**		**6**	

[1] Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Uvažujme funkci $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Funkce f je sudá.
(b) Funkce f je lichá.
(c) Funkce f je periodická.
(d) Funkce f je rostoucí.
(e) Funkce f je prostá.

2. Rozhodněte, které z následujících výroků o čísle

$$x = \sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}$$

jsou pravdivé:

(a) x je větší než 3.
(b) x je racionální číslo.
(c) $x = 2\sqrt{3}$
(d) $x^2 = 10$
(e) $x^2 = 6$

3. Konvexní mnohoúhelník má přesně 77 úhlopříček. Určete, co platí pro počet jeho stran.

(a) Počet jeho stran je sudý.
(b) Počet jeho stran je dělitelný třemi.
(c) Počet jeho stran je menší než 15.
(d) Počet jeho stran je větší než 15.
(e) Žádný konvexní mnohoúhelník nemá přesně 77 úhlopříček.

4. Pro jistou geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí, že $a_5 - a_4 = 576$ a $a_2 - a_1 = 9$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Všechny prvky posloupnosti jsou celá čísla.
(b) Kvocient posloupnosti je sudé celé číslo.
(c) Součet prvních pěti členů posloupnosti je větší než 800.
(d) Součet prvních pěti členů posloupnosti je větší než 1000.
(e) Součet prvních pěti členů posloupnosti je liché celé číslo.

5. Nechť M je množina všech řešení rovnice

$$e^{2\ln\sin x} = 1 - e^{2\ln\cos x}$$

v oboru reálných čísel ($\ln$ značí přirozený logaritmus). Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Pokud $x \in M$, pak $-x \in M$.
(b) Existují $x, y \in M$ tak, že $x - y = \pi/2$.
(c) Existují $x, y \in M$ tak, že $x - y = \pi/4$.
(d) Existuje $x \in M$ tak, že $1000x \in M$.
(e) Pro každé $x, y \in M$ platí $|x - y| \leq \pi/2$.

6. Pro reálné číslo a označíme M_a množinu všech řešení soustavy rovnic

$$|x| + |y| = 1, \qquad xy = a$$

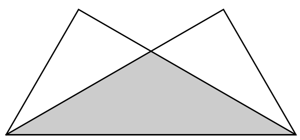
v oboru reálných čísel. (M_a tedy obsahuje dvojice reálných čísel (x, y), které řeší tuto soustavu rovnic.)

(a) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je prázdná.
(b) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je jednoprvková.
(c) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je dvouprvková.
(d) Existuje reálné číslo a tak, že M_a je tříprvková.
(e) Pro každé reálné číslo a platí: Pokud $(x, y) \in M_a$, pak $(y, x) \in M_a$.

7. Polopřímka je zadaná parametrickým předpisem $x = 2 + 2t$ a $y = 1 - 3t$ s parametrem $t \geq 0$. Kružnice je zadaná rovnicí $(x - 3)^2 + y^2 = 4$. Rozhodněte, zda platí:

(a) Polopřímka protíná kružnici v jednom bodě.
(b) Polopřímka protíná kružnici ve dvou bodech.
(c) Polopřímka protíná osu x.
(d) Polopřímka protíná osu y.
(e) Kružnice protíná osu y.

8. Dva shodné trojúhelníky, jejichž vnitřní úhly mají velikosti $30°$, $60°$ a $90°$, jsou umístěny tak, že se částečně překrývají a jejich přepony splývají (viz obrázek). Tyto přepony mají délku 12.



Nechť S značí obsah oblasti, která je společná oběma trojúhelníkům. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) $S > 15$
(b) $S = 12\sqrt{3}$
(c) $S = 15\sqrt{3}$
(d) $S > 20$
(e) $S = 24$

9. Označme f a g dvě funkce reálné proměnné, definované na celém $\mathbb{R}$. Máme dány tři nerovnosti:

(A) $f(x) < g(x)$
(B) $f(x) < g(x) + 10$
(C) $f(x) > g(x)$

Rozhodněte, která z následujících tvrzení musí být pravdivá pro každou volbu f a g.

(a) Ze tří nerovností (A), (B), (C) je pro každou hodnotu proměnné x splněna aspoň jedna.
(b) Ze tří nerovností (A), (B), (C) je pro každou hodnotu proměnné x splněna právě jedna.
(c) Ze tří nerovností (A), (B), (C) jsou pro každou hodnotu proměnné x splněny aspoň dvě.
(d) Ze tří nerovností (A), (B), (C) jsou pro každou hodnotu proměnné x splněny nejvýše dvě.
(e) Počet x, která splňují nerovnost (A), je stejný jako počet x, která splňují nerovnost (B).

10. Zkoumejme celá kladná čísla, která ve svém dekadickém zápisu obsahují stejný počet číslic 1 a 7. Podmínce vyhovují např. čísla 170, 157, 17, 32, ale nikoliv 117, 37, 1. Určete, kolik existuje takových čísel, která jsou menší než 1000.

(a) Tento počet je lichý.
(b) Tento počet je dělitelný čtyřmi.
(c) Tento počet je dělitelný třinácti.
(d) Tento počet je vyšší než 300.
(e) Tento počet je vyšší než 500.

Řešení úloh

1. Správné odpovědi: b.

2. Snadnou úpravou čísla x^2 zjistíme, že $x^2 = 10$.
Správné odpovědi: a.

3. Jedná se o 14-úhelník.
Správné odpovědi: a, c.

4. Posloupnost začíná 3, 12, 48, 192, 768.
Správné odpovědi: a, b, c, d, e.

5. Řešením jsou všechna x, kde je $\sin x$ i $\cos x$ kladné číslo, tj. čísla z některého z intervalů $(0, \pi/2) + 2k\pi$ pro celé číslo k.
Správné odpovědi: c, d.

6. Nakreslením vhodného obrázku zjistíme bez počítání, že správné odpovědi jsou: a, c, e.

7. Přímka se stejnou parametrickou rovnicí (pro reálné t), protíná danou kružnici v bodech s $t_{1,2} = (10 \pm \sqrt{100 + 8 \cdot 13})/26$. Je lehké zjistit, že $t_1 > 0 > t_2$.
Správné odpovědi: a, c.

8. Obsah plochy je $S = 12\sqrt{3}$ (výška proti straně délky 12 má délku $2\sqrt{3}$).
Správné odpovědi: a, b, d.

9. Vždy je splněno (B) nebo (C). Může však platit (A) i (B) současně. Pokud $f(x) > g(x) + 10$ (což jistě platí pro mnohé volby f, g a x), tak platí jen jedna z daných nerovností.
Správné odpovědi: a, d.

10. Zkoumaný počet je $7 + 7 \cdot 8 + 7 \cdot 8^2 + 2 + 2 \cdot (7 + 8 + 8) = 559$.
Správné odpovědi: a, c, d, e.