# Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2015

*Studijní program:* Matematika
*Studijní obory:* MMUI

**Varianta A**

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

**Příklad 1** (25 bodů)

Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou $\{0, 1\}$, který přijímá všechna slova splňující zároveň tyto podmínky:

- slovo obsahuje aspoň jeden znak 0,
- počet znaků 1 obsažených ve slově je dělitelný třemi.

Například slova 1101 nebo 00000 automat přijme, zatímco slova 111 nebo 0011 nepřijme. Přechodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít minimální počet stavů. Minimalitu počtu stavů vašeho automatu zdůvodněte.

**Příklad 2** (25 bodů)

Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```
program A2015;
var A, B, C: integer;
begin
read(A, B);
while A > B do
  begin A:=A-1; B:=B+1 end;
while B > A do
  begin A:=A+1; B:=B-1 end;
C := A*A - B*B;
writeln(C)
end.
```

```
main()  /* A2015 */
{
  int a, b, c;
  scanf("%d %d",&a,&b);
  while (a > b)
     {a--; b++;}
  while (b > a)
     {a++; b--;}
  c = a*a - b*b;
  printf("%d", c);
}
```

Určete, jak závisí výsledná hodnota proměnné `C` (tzn. výstup programu) na vstupních hodnotách proměnných `A`, `B`.

**Příklad 3** (25 bodů)

Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)?$$

**Příklad 4** (25 bodů)

Funkce $f$ je dána předpisem

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}(x+6).$$

(i) Určete definiční obor funkce $f$.

(ii) Zkoumejte spojitost funkce $f$.

(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce $f$.

(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda má funkce $f$ lokální extrémy, a pokud ano, určete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?

(v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce $f$.

(vi) Určete asymptoty funkce $f$.

(vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce $f$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2015

*Studijní program:* Matematika
*Studijní obory:* MMUI

**Varianta A — řešení**

**Příklad 1** (25 bodů)

K řešení úlohy stačí konečný automat se šesti vnitřními stavy. Pomocí stavů automatu rozlišíme, zda už byl přečten aspoň jeden znak 0 a do které zbytkové třídy modulo 3 patří dosud přečtený počet znaků 1. To dává šest kombinací odpovídajících stavům automatu $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$. Koncový z nich bude pouze stav $D$, který odpovídá již přečtenému znaku 0 a počtu znaků 1 dělitelnému třemi. Minimalitu počtu stavů ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

| | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow A$ | $D$ | $B$ | $A$ = nebyla 0, počet 1 $\pmod 3 = 0$ |
| $B$ | $E$ | $C$ | $B$ = nebyla 0, počet 1 $\pmod 3 = 1$ |
| $C$ | $F$ | $A$ | $C$ = nebyla 0, počet 1 $\pmod 3 = 2$ |
| $\leftarrow D$ | $D$ | $E$ | $D$ = byla 0, počet 1 $\pmod 3 = 0$ |
| $E$ | $E$ | $F$ | $E$ = byla 0, počet 1 $\pmod 3 = 1$ |
| $F$ | $F$ | $D$ | $F$ = byla 0, počet 1 $\pmod 3 = 2$ |

**Příklad 2** (25 bodů)

Vstupní hodnoty proměnných $A$, $B$ si označíme $A_0$, $B_0$. Rozlišíme tři případy:

a) Mají-li vstupní hodnoty $A_0$, $B_0$ stejnou paritu, provede se nejvýše jeden z cyklů v programu. Proběhne podle potřeby tolikrát, až se proměnná s nižší vstupní hodnotou bude přesně rovnat proměnné s vyšší vstupní hodnotou. Obě proměnné $A$, $B$ tak dosáhnou stejné hodnoty $(A_0+B_0)/2$ a proto výsledná hodnota proměnné $C$ bude rovna $C = (A + B) \cdot (A - B) = (A_0 + B_0) \cdot 0 = \mathbf{0}$.

b) Mají-li vstupní hodnoty $A_0$, $B_0$ různou paritu a přitom $A_0 < B_0$, první z cyklů v programu se neprovede ani jednou, ve druhém cyklu se proměnná A postupně zvýší až na hodnotu $(A_0 + B_0 + 1)/2$ a proměnná $B$ se sníží na hodnotu $(A_0 + B_0 - 1)/2$. Výsledná hodnota proměnné $C$ bude proto rovna $C = (A + B) \cdot (A - B) = (A_0 + B_0) \cdot 1 = \mathbf{A_0} + \mathbf{B_0}$.

c) Mají-li vstupní hodnoty $A_0$, $B_0$ různou paritu a přitom $A_0 > B_0$, bude se v prvním cyklu proměnná $A$ snižovat až na hodnotu $(A_0 + B_0 - 1)/2$ a proměnná $B$ se zvýší na $(A_0 + B_0 + 1)/2$. Tím ale výpočet nekončí. Poté je totiž splněna podmínka druhého cyklu a jeho tělo bude provedeno přesně jednou, přičemž si obě proměnné vymění hodnoty a situace se převede na předchozí případ.

**Příklad 3** (25 bodů)

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Podle Heineho věty a l'Hospitalova pravidla platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x) - \arctan(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{(1+x^2)\cos(x) - 1}{3x^2(1+x^2)} =$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x) - 1 + x^2\cos(x)}{3x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Existuje tedy index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ je $\sin(\frac{1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n}) > 0$. Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konverguje podle integrálního kritéria. Podle limitního srovnávacího kriteria tedy konverguje i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin(\frac{1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n}) \right)$$

a nutně i vyšetřovaná řada.

**Příklad 4** (25 bodů)

(i) Definiční obor funkce je
$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

(ii) Z věty o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí a ze spojitosti funkce $e^x$ plyne spojitost funkce $f$ v každém bodě definičního oboru $D(f)$.

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$.

(iv) Snadno vypočteme
$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \right) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{(x-3)(x+2)}{x^2} \right).$$

Ze znaménka derivace dostaneme

- $f'(x) > 0$, a tedy $f$ je rostoucí, na intervalu $(-\infty, -2)$.
- $f'(x) < 0$, a tedy $f$ je klesající, na intervalu $(-2, 0)$.
- $f'(x) < 0$, a tedy $f$ je klesající, na intervalu $(0, 3)$.
- $f'(x) > 0$, a tedy $f$ je rostoucí, na intervalu $(3, \infty)$.

Funkce $f(x)$ má lokální maximum $4e^{\frac{-1}{2}}$ v bodě $-2$ a lokálni minimum $9e^{\frac{1}{3}}$ v bodě 3. Jelikož není funkce $f$ na $D(f)$ omezená shora ani zdola, tak nenabývá na $D(f)$ maxima ani minima.

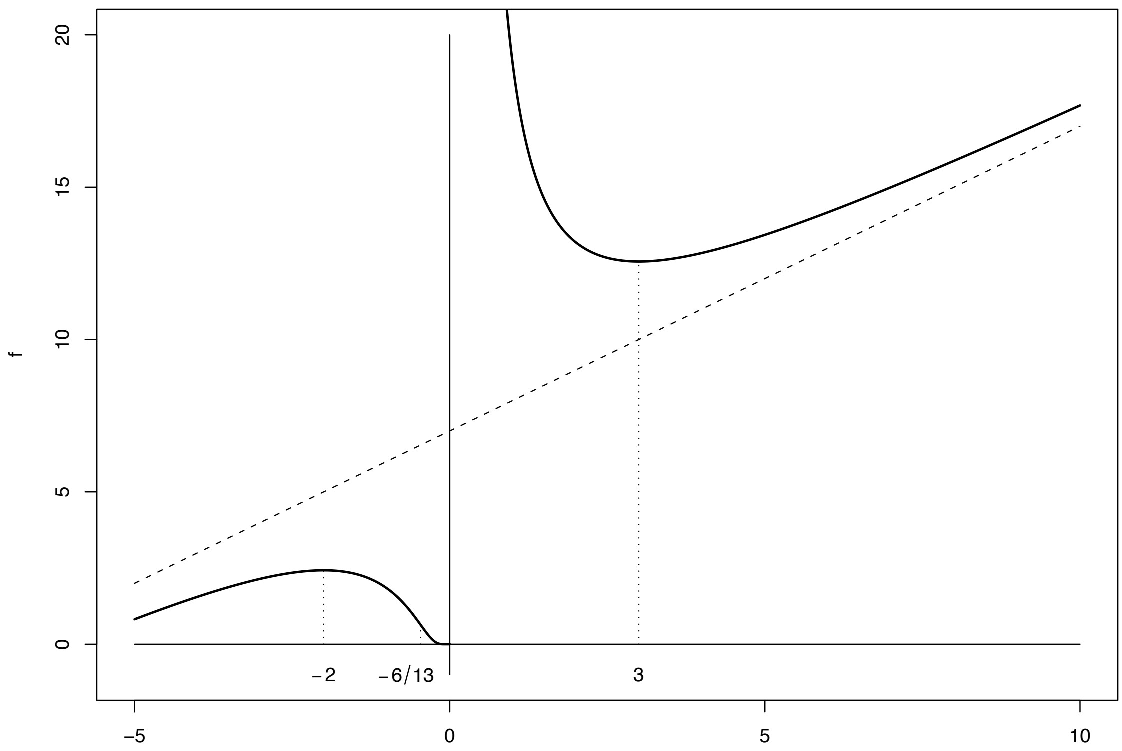
(v) Vypočteme druhou derivaci
$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{13x + 6}{x^4} \right).$$

Za znaménka druhé derivace dostaneme

- $f''(x) < 0$, a tedy $f$ je konkávní, na intervalu $(-\infty, -\frac{6}{13})$.
- $f''(x) > 0$, a tedy $f$ je konvexní, na intervalu $(-\frac{6}{13}, 0)$.
- $f''(x) > 0$, a tedy $f$ je konvexní, na intervalu $(0, \infty)$.

(vi) Funkce $f$ má asymptoty $y = x + 7$ a $x = 0$.

(vii) Náčrt grafu funkce $f$ na základě uvedených výpočtů:


f
0
5
10
15
20
−2
−6/13
3
−5
0
5
10