Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2015

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)?$$

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}(x+6).$$

(i) Určete definiční obor funkce f.

(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.

(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.

(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda má funkce f lokální extrémy, a pokud ano, určete je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?

(v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f.

(vi) Určete asymptoty funkce f.

(vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 3 (25 bodů)

Spočtěte

$$\int_M \frac{2x-y}{x+y}dxdy,$$

kde $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ (x+y)^3<xy, x\geq 0, y\geq 0\}$. Použijte zobecněné polární souřadnice.

Příklad 4 (25 bodů)

Najděte ortonormální bázi podprostoru vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ generovaného vektory $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ a určete ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}_3$ na podprostor generovaný vektory $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$. (Ortonormální bázi i ortogonální projekci hledejte vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.)

$$\mathbf{v}_1=(1,2,0,-1),\quad \mathbf{v}_2=(1,0,2,7),\quad \mathbf{v}_3=(6,1,-1,2)$$

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2015

Studijní program: Matematika

Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Podle Heineho věty a l'Hospitalova pravidla platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x) - \arctan(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{(1+x^2)\cos(x) - 1}{3x^2(1+x^2)} =$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x) - 1 + x^2\cos(x)}{3x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Existuje tedy index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ je $\sin(\frac{1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n}) > 0$. Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konverguje podle integrálního kritéria. Podle limitního srovnávacího kriteria tedy konverguje i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin(\frac{1}{n}) - \arctan(\frac{1}{n}) \right)$$

a nutně i vyšetřovaná řada.

Příklad 2 (25 bodů)

(i) Definiční obor funkce je

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

(ii) Z věty o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí a ze spojitosti funkce e^x plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $D(f)$.

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$.

(iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x^2} \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{(x-3)(x+2)}{x^2} \right).$$

Ze znaménka derivace dostaneme

- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(-\infty, -2)$.
- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(-2, 0)$.
- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(0, 3)$.
- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(3, \infty)$.

Funkce $f(x)$ má lokální maximum $4e^{\frac{-1}{2}}$ v bodě -2 a lokálni minimum $9e^{\frac{1}{3}}$ v bodě 3. Jelikož není funkce f na $D(f)$ omezená shora ani zdola, tak nenabývá na $D(f)$ maxima ani minima.

(v) Vypočteme druhou derivaci

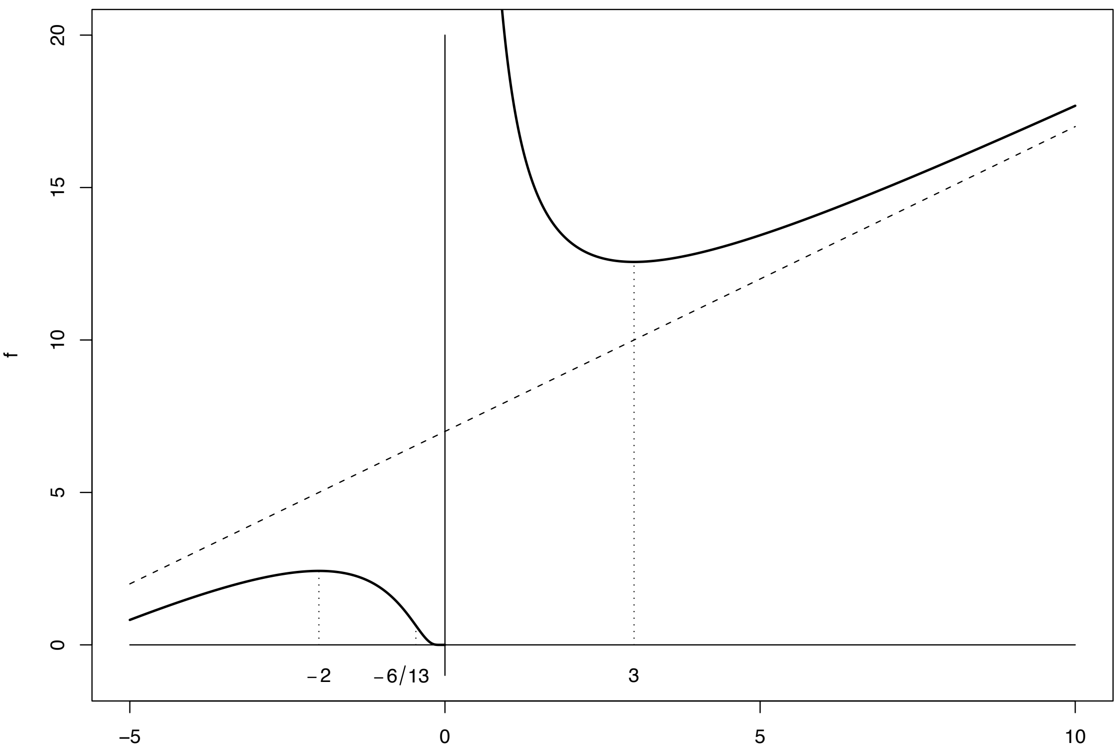
$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{13x + 6}{x^4} \right).$$

Za znaménka druhé derivace dostaneme

- $f''(x) < 0$, a tedy f je konkávní, na intervalu $(-\infty, -\frac{6}{13})$.
- $f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(-\frac{6}{13}, 0)$.
- $f''(x) > 0$, a tedy f je konvexní, na intervalu $(0, \infty)$.

(vi) Funkce f má asymptoty $y = x + 7$ a $x = 0$.

(vii) Náčrt grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:


f
0
5
10
15
20
−5
0
5
10
−2
−6/13
3

Příklad 3 (25 bodů)

Použijeme substituci $x = r\cos^2(\alpha)$, $y = r\sin^2(\alpha)$, $r > 0$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Z $(x+y)^3 < xy$ dostáváme $0 < r < \sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)$. Množina $M \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x+y)^3 < xy, x > 0, y > 0\}$ má nulovou Lebesqueovu míru. Jacobián je $2r\sin(\alpha)\cos(\alpha)$. Tedy

$$\begin{aligned}
\int_M \frac{2x-y}{x+y}dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)} \frac{r(2\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha))}{r} 2r\sin(\alpha)\cos(\alpha)drd\alpha \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)} 2r(2\cos^3(\alpha)\sin(\alpha)-\cos(\alpha)\sin^3(\alpha))drd\alpha \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [r^2]_0^{\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}(2\cos^3(\alpha)\sin(\alpha)-\cos(\alpha)\sin^3(\alpha))d\alpha \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(\alpha)\sin^5(\alpha)(2\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha))d\alpha.
\end{aligned}$$

Použijeme substituci $\sin(\alpha) = t$ a dostaneme

$$\int_M \frac{x-y}{x+y}dxdy = \int_0^1 (1-t^2)^2 t^5(2-3t^2)dt = \frac{1}{120}.$$

Příklad 4 (25 bodů)

Použijeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces s průběžným normováním.

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,0,-1)$$

$$\mathbf{w}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 = (1,0,2,7) + \frac{6}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,0,-1) = (1,0,2,7) + (1,2,0,-1) = (2,2,2,6)$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{w}_2'}{\|\mathbf{w}_2'\|} = \frac{1}{2\sqrt{12}}(2,2,2,6) = \frac{1}{\sqrt{12}}(1,1,1,3)$$

$$\mathbf{w}_3' = \mathbf{v}_3 - ((\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2) = (6,1,-1,2) - \left(\frac{6}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,0,-1) + \frac{12}{\sqrt{12}}\frac{1}{\sqrt{12}}(1,1,1,3)\right)$$

$$= (6,1,-1,2) - ((1,2,0,-1) + (1,1,1,3)) = (6,1,-1,2) - (2,3,1,2) = (4,-2,-2,0)$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{w}_3'}{\|\mathbf{w}_3'\|} = \frac{1}{2\sqrt{6}}(4,-2,-2,0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1,0)$$

Jedna z ortonormálních bází prostoru generovaného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ je

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,0,-1),\ \frac{1}{\sqrt{12}}(1,1,1,3),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1,0)\right) .$$

Podprostor generovaný vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ je roven podprostoru generovanému vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$. Ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}_3$ na tento podprostor odečítáme od vektoru $\mathbf{v}_3$ při výpočtu vektoru $\mathbf{w}_3'$, je tedy rovná $(2,3,1,2)$.