Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2015

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Řešení příkladů pečlivě odůvodněte.

Příklad 1 (25 bodů)

Spočtěte

$$\int_M \ln(1 + x^2 + y^2)dxdy,$$

kde $M = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0, x^2 + y^2 \leq a\}$.

Příklad 2 (25 bodů)

Nalezněte supremum a infimum funkce

$$f(x, y) = e^{x+y}$$

na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^3 + y^3 - 2xy = 0, x + y > 0\}$$

a rozhodněte, zda funkce f těchto hodnot nabývá.

Příklad 3 (25 bodů)

Nechť náhodný vektor $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, N_3)$ má multinomické rozdělení s celkovým počtem pozorování $N_1 + N_2 + N_3 = n$ a s pravděpodobnostmi $\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{1}{4} + \frac{\theta}{4},\ \frac{1}{4} - \frac{\theta}{4},\ \frac{1}{2}\right)$, kde $\theta \in (-1, 1)$ je neznámý parametr.

- (i) Spočítejte maximálně věrohodný odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ.
- (ii) Určete asymptotické rozdělení odhadu $\widehat{\theta}_n$.
- (iii) Navrhněte nestranný odhad parametru θ založený na N_1 a spočítejte jeho asymptotické rozdělení. Zjistěte, pro jaká θ je jeho asymptotický rozptyl více než dvojnásobkem asymptotického rozptylu maximálně věrohodného odhadu.
- (iv) Sestavte testovou statistiku Raova skórového testu hypotézy $H_0 : \theta = \theta_0$ proti alternativě $H_1 : \theta \neq \theta_0$ a určete kritický obor tohoto testu ve speciálním případě $\theta_0 = 0$.

Příklad 4 (25 bodů)

Kupónová obligace v nominální hodnotě $F = 10$ s ročním kupónem $C = 1$ splatná přesně za dva roky (tj. zcela jistě po datu exkuponu) se prodává za (tržní) cenu $P = \frac{399}{44}$ (všechny hodnoty v tisících Kč).

- (i) Vyjádřete obecně současnou hodnotu uvedené obligace při hodnotící úrokové míře i.
- (ii) Formulujte vztah pro výnos do splatnosti (YTM).
- (iii) Vypočtětě výnos do splatnosti s výše uvedenými konkrétními hodnotami.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2015

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

$$
\begin{aligned}
\int_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy &= \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{bmatrix} = \int_0^{\sqrt{a}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r\ln(1+r^2)d\varphi dr \\
&= \int_0^{\sqrt{a}} \pi r\ln(1+r^2)dr = \left[t = 1+r^2\right] = \frac{\pi}{2}\int_1^{1+a}\ln(t)dt \\
&= \frac{\pi}{2}\left[t(\ln(t)-1)\right] = \frac{\pi}{2}(1+a)(\ln(1+a)-1) + \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2}(1+a)\ln(1+a) - \frac{\pi a}{2}.
\end{aligned}
$$

Příklad 2 (25 bodů)

Označme $g(x,y)=x+y$. Protože je exponenciála rostoucí a spojitá, stačí řešit pouze supremum a infimum funkce g na M. Označme $\Phi(x,y)=x^3+y^3-2xy$.

Nyní ukážeme, že množina $\overline{M}$ je omezená a $\overline{M}=M\cup\{(0,0)\}$. Převedeme vztahy $\Phi(x,y)=0, x+y>0$ do polárních souřadnic a dostaneme rovnici $r=h(\alpha)=\frac{\sin(2\alpha)}{\sin^3(\alpha)+\cos^3(\alpha)}$, kde $r>0$ a $\alpha\in(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})=I$. Protože funkce h je spojitá na intervalu I a záporná pro $\alpha\in I\setminus[0,\frac{\Pi}{2}]$, tak existuje $R=\max_I(h)$. Pak $M\subset\overline{B(0,R)}$ a tedy M je omezená. Lze snadno odvodit, že existuje $\epsilon>0$, že pro každé $x\in(0,\epsilon)$ je $\Phi(x,x^2)<0$, $\Phi(x,x^3)>0$. Ze spojitosti Φ tedy plyne, že pro každé $\delta>0$ je $B((0,0),\delta)\cap M\neq\emptyset$. Tedy $(0,0)\in\overline{M}$. Na druhou stranu

$$\overline{M}\subset M\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \Phi(x,y)=0, x+y=0\}=M\cup\{(0,0)\}.$$

Tedy $\overline{M}=M\cup\{(0,0)\}$.

$\overline{M}$ je omezená uzavřená množina, tedy je kompaktní. Z tohoto a ze spojitosti g na $\overline{M}$ plyne, že g nabývá maxima a minima na $\overline{M}$.

Nyní ověříme předpoklady věty o Lagrangeových multiplikátorech. Funkce g a Φ jsou C^1 na $\mathbb{R}^2$ a $\nabla\Phi(x,y)=(3x^2-2y,3y^2-2x)$ je nulový pouze v bodech $(0,0)\in\overline{M}$ a $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})\notin\overline{M}$. Označíme tedy bod $(0,0)$ jako podezřelý a zbytek řešíme na $\overline{M}\setminus\{(0,0)\}=M$.

Z věty o Lagrangeových multiplikátorech plyne, že body, v nichž může být extrém, jsou pouze body $(x,y)\in M$, pro které existuje $\lambda\in\mathbb{R}$, jež řeší soustavu rovnic $\nabla(g-\lambda\Phi)(x,y)=(0,0)$, $\Phi(x,y)=0$. Toto splňuje pouze bod $(1,1)$. Nalezli jsme tedy 2 body $(0,0)\in\overline{M}\setminus M$ a $(1,1)\in M$. Z toho plyne, že supremum f na M se nabývá v bodě $(1,1)$ a je rovno e^2 a infimum f na M se nenabývá a je rovno 1.

Příklad 3 (25 bodů)

(i) Sdružená hustota pozorování $\boldsymbol{N}$ je

$$f(n_1, n_2, n_3) = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!}\Big(\frac{1+\theta}{4}\Big)^{n_1}\Big(\frac{1-\theta}{4}\Big)^{n_2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n_3}, \quad \text{pokud } n_1+n_2+n_3 = n.$$

Věrohodnostní funkce pro parametr θ je

$$L(\theta) = C\Big(\frac{1+\theta}{4}\Big)^{N_1}\Big(\frac{1-\theta}{4}\Big)^{N_2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-N_1-N_2}.$$

a logaritmická věrohodnost je

$$\ell(\theta) = N_1 \log\Big(\frac{1+\theta}{4}\Big) + N_2 \log\Big(\frac{1-\theta}{4}\Big) + (n - N_1 - N_2)\log\Big(\frac{1}{2}\Big) + \log C.$$

Věrohodnost je až na konstantu stejná, jako kdybychom pozorovali n nezávislých stejně rozdělených vektorů $\boldsymbol{N}_i = (N_{i1}, N_{i2}, N_{i3})$ s rozdělením $\mathsf{Mult}_3(1, \boldsymbol{\pi})$, přičemž $\boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{N}_i$. Skórová statistika je

$$U(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial\theta} = \frac{N_1}{4}\cdot\frac{4}{1+\theta} - \frac{N_2}{4}\cdot\frac{4}{1-\theta} = \frac{1}{1-\theta^2}\big[N_1 - N_2 - \theta(N_1+N_2)\big].$$

Rovnice $U(\widehat{\theta}) = 0$ má právě jedno řešení $\widehat{\theta} = \frac{N_1-N_2}{N_1+N_2}$ a to je maximálně věrohodný odhad parametru θ.

(ii) Skórová funkce (pro i-té z n pozorování) je

$$U_i(\theta) = \frac{1}{1-\theta^2}\big[N_{i1} - N_{i2} - \theta(N_{i1}+N_{i2})\big].$$

Platí $U(\theta) = \sum_{i=1}^n U_i(\theta)$, což je součet nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Snadno ověříme

$$\mathsf{E}U_i(\theta) = \mathsf{E}N_{i1}\frac{1}{1+\theta} - \mathsf{E}N_{i2}\frac{1}{1-\theta} = 0.$$

Dále

$$\frac{\partial U_i(\theta)}{\partial\theta} = \frac{2\theta}{(1-\theta^2)^2}\big[N_{i1} - N_{i2} - \theta(N_{i1}+N_{i2})\big] - \frac{1}{1-\theta^2}(N_{i1}+N_{i2}),$$

kde hranatá závorka má nulovou střední hodnotu. Nyní můžeme spočítat Fisherovu informaci

$$I(\theta) = -\mathsf{E}\frac{\partial U_i(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{1-\theta^2}\Big(\frac{1+\theta}{4} + \frac{1-\theta}{4}\Big) = \frac{1}{2(1-\theta^2)}.$$

Jelikož obecně platí $\sqrt{n}(\widehat{\theta}-\theta) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, I^{-1}(\theta))$, dostáváme $\sqrt{n}(\widehat{\theta}-\theta) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, 2(1-\theta^2))$.

(iii) Jelikož $\mathsf{E}N_1 = n(1+\theta)/4$, nestranným odhadem θ založeným na N_1 je $\widetilde{\theta} = 4N_1/n - 1$. Podle centrální limitní věty

$$\sqrt{n}\Big(\frac{N_1}{n} - \frac{1+\theta}{4}\Big) \xrightarrow{d} \mathsf{N}\bigg(0, \frac{1+\theta}{4}\Big(1 - \frac{1+\theta}{4}\Big)\bigg),$$

a proto $\sqrt{n}(\widetilde{\theta}-\theta) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, \sigma^2)$, kde

$$\sigma^2 = 4(1+\theta)\Big(1 - \frac{1+\theta}{4}\Big) = 4(1+\theta) - (1+\theta)^2 = 3 + 2\theta - \theta^2.$$

Nerovnost $3 + 2\theta - \theta^2 > 4(1-\theta^2)$ lze přepsat ve tvaru $3\theta^2 + 2\theta - 1 > 0$, což platí pro $\theta \in (1/3, 1)$.

(iv) Platí-li nulová hypotéza $H_0 : \theta = \theta_0$, máme

$$\frac{1}{\sqrt{n}} U(\theta_0) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, I(\theta_0)) \quad \text{a proto} \quad \frac{1}{\sqrt{nI(\theta_0)}} U(\theta_0) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, 1)$$

Dosadíme-li za $U(\theta_0)$ a $I(\theta_0)$, dostaneme Raovu testovou statistiku

$$R_n = \sqrt{\frac{2(1-\theta_0^2)}{n}} \frac{1}{1-\theta_0^2} \big[N_1 - N_2 - \theta_0(N_1 + N_2)\big] = \sqrt{\frac{2}{n(1-\theta_0^2)}} \big[N_1 - N_2 - \theta_0(N_1 + N_2)\big].$$

Pro $\theta_0 = 0$ budeme zamítat hypotézu na hladině α, pokud

$$\sqrt{\frac{2}{n}} |N_1 - N_2| > u_{1-\alpha/2},$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ je $(1-\alpha/2)$-kvantil normovaného normálního rozdělení.

Příklad 4 (25 bodů)

(i) Současnou hodnotu označíme PV. Pro uvedenou situaci platí

$$PV = \frac{C}{1+i} + \frac{C+F}{(1+i)^2}.$$

(ii) Je-li obligace na trhu koupena za hodnotu P, je výnos do splatnosti (označme Y) vlastně vnitřní míra výnosnosti (vnitřní výnosové procento) peněžního toku $(-P, C, C+F)$. Výnos do splatnosti v tomto případě je řešením rovnice

$$P = \frac{C}{1+i} + \frac{C+F}{(1+i)^2}$$

vzhledem k proměnné i.

Z toho plynoucí kvadratická rovnice má dva kořeny, z nichž pouze ten větší má ekonomický smysl:

$$Y = \frac{C - 2P + \sqrt{C^2 + 4CP + 4FP}}{2P}.$$

Alternativně po substituci úroková míra $\rightarrow$ diskontní faktor, tj. $v = \frac{1}{1+i}$ je možné získat řešení pro odpovídající diskontní faktor v řešením rovnice pro neznámý diskontní faktor v:

$$P = Cv + (C+F)v^2.$$

(iii) Postup výpočtu pro konkrétní numerické hodnoty:

$$\text{diskriminant} = C^2 + 4\,CP + 4\,FP = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot \tfrac{399}{44} + 4 \cdot 10 \cdot \tfrac{399}{44} = \frac{11 + 399 + 3990}{11} = 400,$$

odmocnina z diskriminantu je tudíž 20 a výsledná hodnota Y je

$$Y = \frac{1 - 2 \cdot \frac{399}{44} + 20}{2 \cdot \frac{399}{44}} = \frac{3}{19}.$$