Zadání přijímací zkoušky na MFF UK v Praze v roce 2012

Studijní program Matematika, bakalářské studium
Studijní program Informatika, bakalářské studium

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Nalezněte množinu M všech řešení nerovnice $5x - x^2 \geq 6$ v oboru reálných čísel.

a) Všechna řešení jsou kladná.
b) Všechna řešení jsou záporná.
c) Všechna řešení jsou menší než $2\sqrt{2}$.
d) $M \subseteq \langle \sqrt[3]{2}, \frac{22}{7} \rangle$
e) $M \cap \langle 1, \sqrt{3} \rangle \neq \emptyset$

2. Určete vzdálenost d bodu $(2, 1)$ od přímky procházející body $(5, 1)$ a $(2, 5)$.

a) $d \in \langle 2, \frac{11}{5} \rangle$
b) $d < \sqrt{3}$
c) $2{,}3 < d < 2{,}65$
d) $d = \frac{3}{2}\sqrt{3}$
e) $d = 2\sqrt{2}$

3. Nalezněte množinu M všech řešení nerovnice $x + |x - 2| > |x + 1|$ v oboru reálných čísel.

a) M je otevřený interval.
b) $M = (5, \infty)$
c) $M = (-3, 1)$
d) $M \subseteq (-10, \infty)$
e) $M \cap \langle 1, 4 \rangle \neq \emptyset$

4. Určete počet P všech přirozených pěticiferných čísel, která jsou tvořena pouze ciframi 1, 4 a 7 (ne všechny cifry musí být vždy použity), takových, že mají počet cifer 1 a 4 shodný.

a) $P \in \langle 31, 47 \rangle$
b) $P \in \langle 39, 49 \rangle$
c) $P \in \langle 45, 50 \rangle$
d) P je dělitelné třemi.
e) P je dělitelné sedmi.

5. V reálném oboru vyřešte rovnici $2 \log^2 x = \log x^5 + \log 1000$. Symbol $\log$ označuje dekadický logaritmus. Množinu všech řešení označme M.

a) $M \subseteq \langle 0, \infty)$
b) $3 \in M$
c) Úloha má právě jedno řešení.
d) Existuje záporné řešení úlohy.
e) $M \subseteq \langle \frac{1}{4}, 2000 \rangle$

6. Označme p počet způsobů, kterými můžeme rozdělit 20 stejných jablek mezi Honzíka, Tomáše a Michala, když každý z chlapců musí dostat alespoň dvě jablka.

a) $p < 91$
b) $p \in \langle 85, 130 \rangle$
c) $p \in \langle 95, 125 \rangle$
d) $p \in \langle 105, 148 \rangle$
e) $p \in \langle 115, 200 \rangle$

7. Součin dvou reálných čísel x, y, kde $x \leq y$, je roven 288, jejich součet je 34. Určete hodnotu x a y.

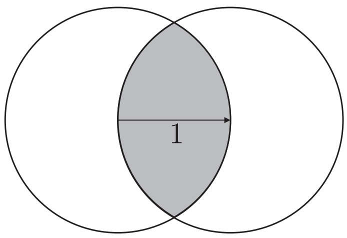
a) $x \leq 8$
b) $x \in (12, 18)$
c) Číslo x je přirozené a sudé.
d) $x > 17$
e) Ze zadání úlohy nelze x a y jednoznačně určit.

8. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic s reálným parametrem λ:

$$x + \lambda y = 1,$$
$$x + 2y = \lambda.$$

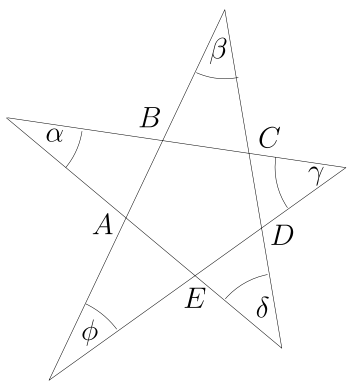
a) Soustava má právě jedno řešení (x, y) právě tehdy, když $\lambda \neq 2$.
b) Soustava má právě jedno řešení (x, y) pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$.
c) Pro $\lambda = 1$ každé řešení (x, y) splňuje nerovnosti $x \geq 0, y \geq 0$.
d) Pro $\lambda = \frac{1}{2}$ nemá soustava řešení.
e) Pro $\lambda = \frac{1}{2}$ existuje řešení (x, y) splňující $x \geq 0, y \geq 0$.

9. Kruh o poloměru 1 má střed na hranici druhého kruhu o poloměru 1. Spočtěte obsah S průniku obou kruhů (viz obrázek).



a) $S < \frac{2\pi}{3}$
b) $S = \frac{1}{2}$
c) $S > \frac{1}{4}$
d) $S > \frac{1}{2}$
e) $S > 1$

10. Označme ω součet úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \phi$ (viz obrázek).



a) $\omega = 180^\circ$
b) $\omega = 270^\circ$
c) Součet ω je roven součtu vnitřních úhlů pětiúhelníku $ABCDE$.
d) Součet ω je roven polovině součtu vnitřních úhlů pětiúhelníku $ABCDE$.
e) Součet ω není možné přesně určit.

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA

ODPOVĚDNÍ LIST - PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA, 2012
BAKALÁŘSKÉ STUDIUM

		Ano	Ne
1.	(a)	○	○
	(b)	○	○
	(c)	○	○
	(d)	○	○
	(e)	○	○

		Ano	Ne
2.	(a)	○	○
	(b)	○	○
	(c)	○	○
	(d)	○	○
	(e)	○	○

		Ano	Ne
3.	(a)	○	○
	(b)	○	○
	(c)	○	○
	(d)	○	○
	(e)	○	○

		Ano	Ne
4.	(a)	○	○
	(b)	○	○
	(c)	○	○
	(d)	○	○
	(e)	○	○

		Ano	Ne
5.	(a)	○	○
	(b)	○	○
	(c)	○	○
	(d)	○	○
	(e)	○	○

		Ano	Ne
6.	(a)	○	○
	(b)	○	○
	(c)	○	○
	(d)	○	○
	(e)	○	○

		Ano	Ne
7.	(a)	○	○
	(b)	○	○
	(c)	○	○
	(d)	○	○
	(e)	○	○

		Ano	Ne
8.	(a)	○	○
	(b)	○	○
	(c)	○	○
	(d)	○	○
	(e)	○	○

		Ano	Ne
9.	(a)	○	○
	(b)	○	○
	(c)	○	○
	(d)	○	○
	(e)	○	○

		Ano	Ne
10.	(a)	○	○
	(b)	○	○
	(c)	○	○
	(d)	○	○
	(e)	○	○

Podpis komise:

Výsledky (A)

1. $\langle 2, 3\rangle$
Správné odpovědi: a, d.

2. Body jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku T o stranách 3, 4, 5. Obsah $T = \frac{1}{2}3 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot d$, proto $d = \frac{3 \cdot 4}{5}$.
Správné odpovědi: c.

3. $(-3, 1) \cup (3, \infty)$
Správné odpovědi: d, e.

4. Rozlišíme následující případy:

- žádná cifra 1: jedna možnost 77777,
- jedna cifra 1: také jedna 4 a tři 7: pět pozic pro 1 a pro každou z nich čtyři pozice pro 4, zbytek 7; 20 možností,
- dvě cifry 1: také dvě cifry 4 a tedy jedna cifra 7: pět pozic pro 7, ze zbylých čtyř pozic volíme dvě pro 1; $5 \cdot \binom{4}{2} = 30$ možností.

Celkem: $1 + 20 + 30 = 51$ možností.
Správné odpovědi: d.

5. Řešení: $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 1000.
Správné odpovědi: a, e.

6. Každému chlapci dáme dvě jablka a pak rozdělujeme zbývajících 14 jablek. 14 jablek + 2 přepážky, tj. z 16 pozic volíme dvě přepážky: $\binom{16}{2} = 120$.
Správné odpovědi: b, c, d, e.

7. Řešení soustavy

$$ab = 288$$
$$a + b = 34$$

vede na kvadratickou rovnici $a \cdot (34 - a) = 288$, která má kořeny 16 a 18.
Správné odpovědi: b, c.

8. Pro $\lambda \neq 2$ má soustava řešení $x = \frac{2-\lambda^2}{2-\lambda}$, $y = \frac{\lambda-1}{2-\lambda}$. Pro $\lambda = 2$ nemá soustava řešení.
Správné odpovědi: a, c.

9. $S = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
Správné odpovědi: a, c, d, e.

10. π
Správné odpovědi: a.