Od obecné relativity k relativistické astrofyzice
aneb Zajímavosti z relativistické astrofyziky pro učitele fyziky

Relativistická astrofyzika je atraktivní partií fyziky. Pojmy jako *gravitační kolaps* nebo *černé díry* asi někdy slyšela většina žáků a ve sci-fi jsou už běžnou rekvizitou, byť často užívanou bez většího pochopení.[1] Černé díry byly dlouho jen teoretickou předpovědí obecné teorie relativity, data z nejrůznějších typů pozorování však postupně vedla k tomu, že však jejich existenci už dávno nikdo nezpochybňuje.

Je tedy přirozené, že na daná témata se mohou žáci a studenti ptát – a je dobře, když o nich má učitel fyziky určité povědomí. Tato kapitola z vás samozřejmě neudělá experty například na černé díry[2]. Ale na základní informace a zajímavosti se tu spolu podíváme. Přes bílé trpaslíky a neutronové hvězdy dojdeme až k těm černým dírám.

Jak číst tuto kapitolu

Lze ji číst různě – podle toho, jak podrobně a do jaké hloubky se chcete s problematikou seznamovat.

Základní text je doplněn řadou poznámek pod čarou – ty můžete zejména při prvním čtení ignorovat. A když budete i v hlavním textu přeskakovat odvození a vzorce, které vám přijdou náročné, můžete celou kapitolu zkusit číst i jako popularizační text. Doufám, že i na této úrovni může přinést zajímavé informace.

Pokud chcete do věcí vidět hlouběji, vzorce a někdy jejich odvození poskytnou další úhel pohledu. V některých případech jde o přibližná odvození nebo odhady, které vystačí v podstatě se středoškolskou fyzikou, jindy je potřeba jít na úvodní vysokoškolskou úroveň. Nikde zde ale nenajdete náročnější výpočty, které by vyžadovaly znalost obecné teorie relativity; rozhodně tu nesuplujeme učebnice OTR nebo odbornou literaturu.

A pak je tu ta spousta poznámek pod čarou. Někdy nabízejí upřesnění, někdy podrobnější vysvětlení. Jindy vybízejí k tomu, abyste si sami něco dopočetli, nebo uvádějí konkrétní číselné hodnoty případně další informace. A mnohdy také odkazy na další zdroje, zejména zdroje dostupné na webu.[3] Takže: nenechte se poznámkami zahltit, užívejte je, jak je libo.[4]

Se všemi podrobnostmi a poznámkami celá kapitola určitě není jen nenáročným „čtením před spaním“. Ale snad si z ní vyberete podle svého gusta.

Poznámka k začlenění do předmětu Fyzikální obraz světa:

Tato kapitola rozhodně **není celá myšlena jako povinná** pro předmět Fyzikální obraz světa.[5] Na to je ostatně až příliš rozsáhlá. Spíše jde o rozšiřující učivo. Záměrem bylo dát budoucím i současným

[1] Tahle výtka ovšem zdaleka neplatí pro všechna sci-fi. Příkladem povídky, která (alespoň kvalitativně) velmi dobře popisuje účinky slapových sil, je *Neutronová hvězda* Larryho Nivena. Zajímavé je, že jde o povídku z roku 1966, kdy neutronové hvězdy byly jen teoretickou předpovědí – první pulzar, což je neutronová hvězda, byl objeven v roce 1967. (Povídka je čtivá, vyšla i česky, zájemcům doporučuji.)

[2] Máte-li zájem se o těchto partiích dozvědět víc, vyberte si na MFF některé specializované přednášky. Lidí, kteří jsou v této oblasti erudováni, je například na Ústavu teoretické fyziky dost.

[3] Odkazujeme i na stránky Wikipedie. Ne že by byla nezpochybnitelným zdrojem, ale zejména v anglické verzi obsahuje často i nové informace a uvádí odkazy na originální články, kde lze dohledat podrobnosti.

[4] Čili, jak to alchymista Scotta říkal ve filmu *Císařův pekař a pekařův císař* o elixíru mládí: „Co kdo snese“.

[5] To je jistě radostné zjištění… Základní znalost, že existují bílí trpaslíci, neutronové hvězdy a černé díry a jaká je u nich velikost efektů OTR, se ovšem u zkoušky předpokládá. Základní informace jsou uvedeny v části Shrnutí.

učitelům informace, které jim mohou pomoci odpovědět na otázky, s nimiž mohou přijít zvídaví a „šťouraví“ žáci a studenti.

Žádný text však nemůže dát odpovědi na všechny podobné otázky. Navíc relativistická astrofyzika je rozvíjející se oblast, takže zejména konkrétní informace a hodnoty nepochybně budou zastarávat – nebojte se proto sami vyhledávat novinky. Snad vám pro to tato kapitola bude dobrým základem a odrazovým můstkem.

Čím začneme a na co se můžeme těšit dál

Abychom celé tematice lépe porozuměli, nejdříve se trochu blíže podíváme, jak vlastně obecná teorie relativity (OTR) popisuje gravitační pole. Dotkneme se přitom pojmu *zakřivený prostoročas*. To bude náplní části 4.1.

V části 4.2 se pak podíváme na hvězdy mnohem hustší, než „normální hvězdy“, i než jakékoli látky, které existují na Zemi: tedy na bílé trpaslíky a neutronové hvězdy. Budete-li chtít, můžete si bílého trpaslíka teoreticky „vymodelovat“ i v Excelu, nebo se podívat, jak lze některé vlastnosti neutronových hvězd alespoň zhruba odhadnout a pochopit i pomocí víceméně středoškolské fyziky.

V části 4.3 už se budeme věnovat černým dírám; tam využijeme základní představu o zakřiveném prostoročase ze začátku kapitoly. Na konci této části přejdeme od teorie k tomu, jak dnes černé díry hledáme a detekujeme.

Po velmi stručném závěru a Shrnutí následují už jen Dodatky.[6]

Takže: pusťme se do toho!

Poděkování

Tvorba této kapitoly byla podpořena z projektu „Podpora přípravy budoucích učitelů matematiky, fyziky a informatiky na MFF UK“ (v rámci tzv. „Ukazatele P“) v roce 2020.[7]

[6] Dodatek A připomíná pár informací ze speciální teorie relativity, Dodatek B se týká lokálních inerciálních systémů a Dodatek C doplňuje informace o jednom typu diagramu použitém v části 4.3. (Z toho je vidět, že dodatky určitě nespadají do „popularizační úrovně“ této kapitoly.)

[7] Původně bylo v rámci daného projektu na „Zajímavosti z relativistické astrofyziky pro učitele fyziky“ přislíbeno 25 stránek; trochu se to rozrostlo…

Obsah

4.1 Jak OTR popisuje gravitační pole: zakřivený prostoročas 4
Pro začátek trochu geometrie ve dvou dimenzích 4
(Zatím jsme stále v rovině. A co zakřivené plochy? Zobecnění i na další zakřivené plochy.)
A teď pro více dimenzí … 8
A pro čtyřrozměrný prostoročas … 9
Zobecnění na zakřivený prostoročas 10
(Sféricky symetrické gravitační pole.)

4.2 Bílí trpaslíci a neutronové hvězdy 12
Statická sféricky symetrická hvězda – a její rovnováha 13
Proč se hvězda nehroutí ani nevybuchuje - a proč to nevydrží věčně 15
Co může vyvinout dostatečný tlak: elektronový Fermiho plyn 16
Jak si vymodelovat bílého trpaslíka 17
(Mohou mít bílí trpaslíci libovolně velkou hmotnost?)
Látka za ještě vyšších hustot 20
Neutronové hvězdy 21
Jak neutronové hvězdy vznikají: výbuch supernovy 22
Pulzary 23
Jak leccos odvodit jednoduše 24
Další možnosti? 27

4.3 Černé díry 28
Trochu historie – aneb opravdu nejde černou díru popsat newtonovsky? 28
Vlastnosti Schwarzschildovy metriky 29
(Význam souřadnic. Fotony letící od černé díry. Horizont černé díry. Pod horizontem.)
Lepší popis prostoročasu nad i pod horizontem: Kruskalův diagram 33
(Pohyb fotonů a dalších částic padajících do černé díry – znázornění v Kruskalově diagramu.)
Nesférický gravitační kolaps a co jím vznikne 36
(Jaké mohou být obecné černé díry?)
Další vlastnosti černých děr 37
(Hawkingovo záření.)
Jaké hmotnosti mohou mít černé díry? 37
Černé díry ve vesmíru – kde a jak je pozorujeme 38
(Černé díry hvězdných hmotností. Gravitační vlny nás informují o srážkách černých děr.
Černé díry „prostředních hmotností“. Superhmotné černé díry. První „fotografie“ černé díry. Kvazary.)

4.4 Závěr 44

Shrnutí 45

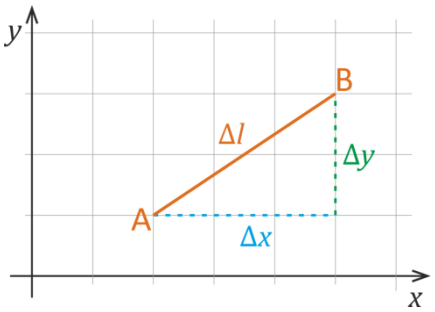
Dodatky
Dodatek 4.A Čtyřinterval ve speciální teorii relativity (a Minkowského prostoročas) 47
Dodatek 4.B Lokální inerciální systém v zakřiveném prostoročase 49
Dodatek 4.C Kruskalův diagram pro maximální prodloužení Schwarzschildovy metriky 51

4.1 Jak OTR popisuje gravitační pole: zakřivený prostoročas

Do hlubšího matematického popisu zakřiveného prostoročasu se zde pouštět nebudeme. Alespoň něco si však pokusíme přiblížit pomocí dvourozměrných analogií. Udělejme tedy drobnou odbočku a podívejme se na rovné a zakřivené plochy. [8]

Pro začátek trochu geometrie ve dvou dimenzích

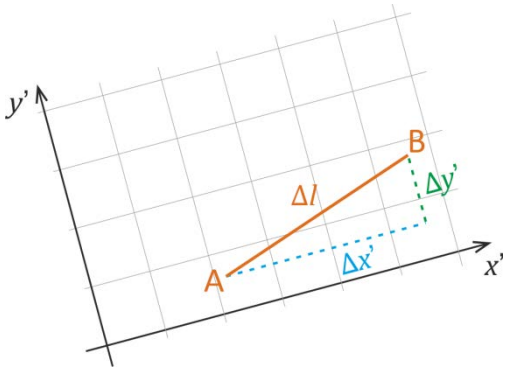
Začneme jednoduše, v rovině. Na ní si můžeme nakreslit síť kartézských souřadnic x, y. Délku úsečky Δl spojující body A a B spočteme jednoduše jako



$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \ , \qquad (1)$$

kde Δx a Δy jsou rozdíly souřadnic koncových bodů úsečky, viz obrázek. Tohle je jednoduché, je to stará známá Pythagorova věta.

Vzdálenost bodů A a B jsme spočetli pomocí souřadnic x a y. Můžeme ji spočíst i v jiné kartézské soustavě, s osami x' a y':



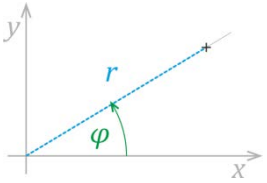
$$(\Delta l')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 \ . \qquad (2)$$

Vyjde ovšem stejná vzdálenost,

$$\Delta l' = \Delta l \ , \qquad (3)$$

a je to přirozené: v obou případech jde o délky stejné úsečky AB, a ta nezávisí na tom, jak soustavu souřadnic natočíme nebo posuneme. Lze to vyjádřit konstatováním, že Δl je *invariantní* vůči natočení a posunutí soustavy souřadnic – ale názornější je asi prostě říci, že délka Δl má jasný geometrický význam, nezávislý na volbě soustavy souřadnic.

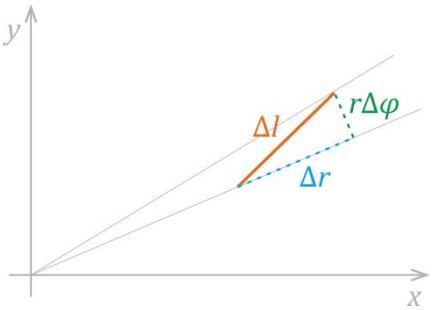
A co když v rovině použijeme jiné souřadnice než kartézské, například polární souřadnice r a φ? Nemusíme asi připomínat, že převod mezi polárními a kartézskými souřadnicemi je



$$x = r\cos\varphi, \quad x = r\sin\varphi \ , \qquad (4)$$

viz obrázek.

Obrázek vpravo napovídá, že délku úsečky můžeme v tomto případě určit pomocí vztahu



$$(\Delta l)^2 = (\Delta r)^2 + (r\Delta\varphi)^2 \ , \qquad (5)$$

kde Δr a $\Delta\varphi$ jsou rozdíly radiálních a úhlových souřadnic koncových bodů.

[8] Pokud jste již absolvovali nějakou přednášku z diferenciální geometrie, tak následující věci už určitě znáte, a to na vyšší úrovni, než se jich dotkneme tady. Takže následující odstavce můžete brát jen jako lehké připomenutí dané problematiky.

Upozornění (!):
Obrázek to napovídá sice názorně, ale vztah (5) platí jen přibližně, pouze pro dostatečně blízké body.[9] Proto se často místo konečných rozdílů souřadnic píšou diferenciály:

$$(dl)^2 = (dr)^2 + (r\,d\varphi)^2 \ . \tag{6}$$

Tento vztah už platí přesně.[10] Poznamenejme ještě, že vztah (5) resp. (6) můžeme odvodit přímo ze vztahů (1) a (4), to však již ponecháme příslovečnému laskavému čtenáři jako „domácí cvičení“ ☺.[11]

Poznamenejme, že pomocí diferenciálů samozřejmě můžeme zapsat i vztah pro vzdálenost blízkých bodů v rovině, tedy místo (1) psát

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \ . \tag{7}$$

Zatím jsme stále v rovině. (V ní platí ***euklidovská geometrie***.)

V rovině platí známé poučky euklidovské geometrie, například:

- Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°.
- Obvod kruhu je $2\pi r$.
- K přímce jde bodem, který na ni neleží, vést jedinou rovnoběžku.

Poznamenejme, že toto neplatí jen na rovině. Například když na list papíru namalujeme trojúhelník, můžeme pak papír stočit a udělat z něj povrch válce nebo kužele – úhly v trojúhelníku však zůstanou stále stejné. Museli bychom je ovšem měřit na povrchu papíru, jako bychom byli malými mravenci lezoucími po papíru a studujícími jeho geometrii.

Přímky, které jsme na papír namalovali, nebudou už v prostoru přímkami, ale pro mravence, který po papíru poleze, budou stále přímými čarami. Mravenec přece po takové čáře pochoduje stále stejným směrem, neuhýbá napravo ani nalevo.

Můžeme říci, že z hlediska *vnitřní geometrie* dané plochy jde stále o geometrii euklidovskou. Také se to vyjadřuje konstatováním, že daná plocha není zakřivená (pořád mluvíme z hlediska vnitřní geometrie) nebo jinými slovy, že je *plochá*.[12]

[9] Přesněji: Pro $|\Delta\varphi| \ll 1$ a $|\Delta r| \ll r$. Ještě přesněji: Ve vztahu (5) jsou zanedbány členy třetího a vyššího řádu. Obrázek sice sugeruje, že jde opět „jen o Pythagorovu větu“, rozmyslete si ale sami, co je v něm nepřesné. (Nápověda: Je „kousek“ označený $r\Delta\varphi$ úsečka nebo kruhový oblouk?)

[10] Při vysvětlování na úrovni střední školy asi raději pojem diferenciál používat nebudeme a budeme mluvit o blízkých bodech. Maximálně, s vědomím toho, jak nepřesně se vyjadřujeme, můžeme snad vztah (6) napsat s tím, že platí pro „nekonečně blízké body“.

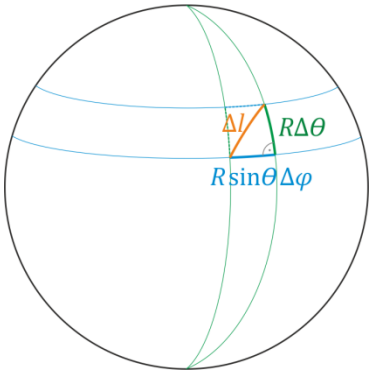
[11] Zkuste si to, je to hezké opakování věcí, které jste už určitě někdy dělali. Nápověda: Diferencováním (4) dostaneme $dx = dr\cos\varphi + r(-\sin\varphi)d\varphi$, podobně pro *dy*. Pak už stačí dosadit do (7). Odvozovat (5) jde dokonce i bez diferenciálního počtu (stačí vědět, že pro malé úhly je $\sin\alpha \doteq \alpha$), ovšem je to trochu klopotné; takže by to v principu šlo ukázat i středoškolákům, ale asi by to bylo jen pro nadšence.

[12] „Plochá plocha“ zní v češtině divně a moc se neříká; anglické „flat surface“ tento problém nemá.

A co zakřivené plochy? (Na nich se potkáme s ***neeuklidovskou geometrií***.)

Míníme teď plochy zakřivené z hlediska jejich vnitřní geometrie. Asi nejjednodušším příkladem je **sféra**, tedy povrch koule. Ta rozhodně není plochá; papírem ji neobalíme, aniž bychom ho zkrabatili.

Sféru si můžeme představit jako povrch glóbusu, názorně na něm můžeme ilustrovat sférické souřadnice θ a φ. Čáry θ = konst. jsou rovnoběžky, čáry φ = konst. poledníky. Poloměr sféry označíme R.



Jaká je vzdálenost dvou bodů na sféře? Jestliže se jejich souřadnice liší o $\Delta\theta$ a $\Delta\varphi$ a jde o **body velmi blízké**, pak jejich vzdálenost Δl je[13]

$$(\Delta l)^2 = (R\,\Delta\theta)^2 + (R\sin\theta\,\Delta\varphi)^2 \qquad (8)$$

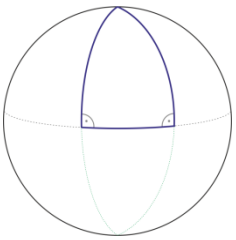
Při vyjádření pomocí diferenciálů má vztah (8) tvar[14]

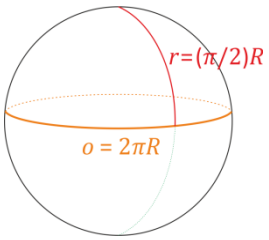
$$(dl)^2 = (R\,d\theta)^2 + (R\sin\theta\,d\varphi)^2\ . \qquad (9)$$

Pokud bychom chtěli určit vzdálenost dvou vzdálenějších bodů nebo délku nějaké křivky na sféře, museli bychom vztah (9) integrovat. Důležité je uvědomit si, že vzdálenost měříme **na sféře** – na glóbusu bychom to mohli udělat napnutou nití, rozhodně bychom se neprovrtávali vnitřkem glóbusu.

Když se díváme na sféru v našem běžném třírozměrném prostoru, řekneme, že na ní nejsou přímky. Ovšem z hlediska vnitřní geometrie máme dobrou analogii přímky: **nejpřímější čáru**. Můžeme si představit mravence, který leze po glóbusu a neuhýbá nalevo ani napravo. Takovou nejpřímější čarou je třeba jakýkoli poledník nebo také rovník.[15] Obecně jsou nejpřímějšími čarami *hlavní kružnice*.[16] Pro dva body na sféře je jejich nejkratší spojnicí na sféře právě oblouk daný hlavní kružnicí.

Pomocí nejpřímějších čar můžeme na sféře kreslit třeba trojúhelníky nebo kružnice a zjišťovat, zda zde platí to, co známe z euklidovské geometrie: například, zda součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°, nebo zda obvod kruhu je $2\pi r$. A například z následujících obrázků vidíme, že to neplatí.





Když strany trojúhelníka tvoří části poledníků a rovníku, zjevně již součet úhlů, které poledníky svírají s rovníkem, je 180°, navíc je zde úhel mezi poledníky (u „severního pólu“). Součet úhlů v tomto trojúhelníku je tedy větší než 180°.

Podobně rovník je kružnicí, jejíž poloměr (měřený po sféře (!)) je $r = (\pi/2)\,R$. Obvod kruhu (tj. délka rovníku) je $2\pi R$, tedy $o = 4\,r$, je tedy menší než $2\pi r$. Vidíme, že **na sféře neplatí euklidovská geometrie**.

---

[13] Odvození je jednoduché: $R\sin\theta\,\Delta\varphi$ je délka „kousku rovnoběžky“ a $R\,\Delta\theta$ délka „kousku poledníku“, viz obrázek. Oba „kousky“ jsou kruhovými oblouky, ovšem když jsou body blízko sebe, jsou oblouky tak krátké, že jde prakticky o úsečky. Navíc jsou tyto úsečky na sebe kolmé. Vztah (5) pak dostaneme z Pythagorovy věty. Vzdálenost není tímto vztahem určena zcela přesně, zanedbáváme zde členy vyššího řádu v $\Delta\varphi$ a $\Delta\theta$.

[14] V tomto tvaru platí vztah přesně. (Názorně, byť poněkud nepřesně, by šlo říci, že určuje vzdálenost dvou nekonečně blízkých bodů.)

[15] Pozor, ne už jiná rovnoběžka. Názorně je to vidět na rovnoběžkách, které jsou blízko severního pólu. Rovnoběžka vzdálená od severního pólu třeba deset metrů zcela zjevně není nejpřímější čára.

[16] Připomeňme, že hlavní kružnice jsou průsečíky sféry s rovinou procházející středem sféry.

Na sféře neplatí ani to, že k dané přímce lze bodem, který na ní neleží, vést jedinou rovnoběžku. Analogií přímek jsou nejpřímější čáry, tedy například poledníky. K vybranému poledníku ale bodem mimo něj **nelze vést** nejpřímější křivku, která by s ním byla rovnoběžná. Příklad: Začneme-li na rovníku, tak s nultým poledníkem je „nejrovnoběžnější" nějaký sousední poledník, třeba první. Ale jak postupujeme k severu, vzdálenost mezi poledníky se zmenšuje a na pólu se oba poledníky protnou.

Je jasné, že na sféře platí jiná geometrie, než na rovině; jde o příklad geometrie **neeuklidovské**.

Podstatné je, že **vnitřní geometrii vystihuje vztah** (8), resp. (9) **pro vzdálenost blízkých bodů**. Ukazuje to část matematiky zvaná *diferenciální geometrie* (pro nás bude konkrétně podstatná tzv. *Riemannova geometrie*); v našem stručném úvodu do problematiky se bohužel musíme omezit na konstatování, že tomu tak je.[17] Přesto nám sféra bude dobrým odrazovým můstkem pro obecnější případy.

Zobecnění i na další zakřivené plochy (při němž poznáme **metrický tenzor**)

Když se podíváme na vztahy (1), (3) a (5) pro vzdálenost blízkých bodů, vidíme, že se v nich vždy objevují druhé mocniny rozdílů souřadnic. Mohlo by nás napadnout, že v obecném případě by tedy vztah pro vzdálenost mohl vypadat třeba takto: $(\Delta l)^2 = f(x_1, x_2)\,(\Delta x_1)^2 + g(x_1, x_2)\,(\Delta x_2)^2$, kde x_1 a x_2 jsou souřadnice a f a g nějaké funkce těchto souřadnic; právě tyto funkce by vystihovaly geometrii plochy. Ve skutečnosti je to nepatrně složitější: ve výrazu pro délku se může objevit i člen $\Delta x_1\,\Delta x_2$. A ještě jedna formalita: souřadnice bývá zvykem označovat indexy nikoli dole, ale nahoře, tedy x^1 a x^2. (Pozor, nejde o mocniny!)

Obecný tvar vztahu pro vzdálenost blízkých bodů tedy můžeme zapsat jako

$$(\Delta l)^2 = g_{11}\,\Delta x^1\Delta x^1 + g_{12}\,\Delta x^1\Delta x^2 + g_{21}\,\Delta x^2\Delta x^1 + g_{22}\,\Delta x^2\Delta x^2 \ ,$$

kde g_{11}, … až g_{22} jsou funkcemi souřadnic. Ještě kratší zápis dostaneme, když použijeme znak sumy, případně Einsteinovu sumační konvenci, tedy dohodu, že přes opakující indexy se sčítá:

$$(\Delta l)^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} g_{ij}\,\Delta x^i\Delta x^j \ \equiv\ g_{ij}\,\Delta x^i\Delta x^j \ . \qquad (10)$$

Vypadá to složitě? Ve skutečnosti to tak dramatické není. Například vztah (1) pro vzdálenosti bodů v rovině dostaneme z (10), když bude $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv x$ a

$$g_{11} = 1,\ \ g_{22} = 1,\ \ \ g_{12} = g_{21} = 0\,. \qquad (11)$$

V polárních souřadnicích $x^1 \equiv r, x^2 \equiv \varphi$ ovšem funkce g_{ij} mají jiný tvar (srovnejte s (6)):

$$g_{11} = 1,\ \ g_{22} = r,\ \ g_{12} = g_{21} = 0\ . \qquad (12)$$

Přesto jde o stejnou geometrii (v daném případě o geometrii roviny, tedy o geometrii euklidovskou). Vidíme, že **tvar funkcí g_{ij} závisí na volbě souřadnic**. Závisí samozřejmě také na geometrii plochy; například pro sféru (kde souřadnice jsou $x^1 \equiv \theta,\ x^2 \equiv \varphi$) je (srovnejte s (8))

$$g_{11} = R,\ \ g_{22} = R\sin\theta,\quad g_{12} = g_{21} = 0\,. \qquad (13)$$

[17] Něco málo o geometrii sféry bychom mohli z (6) odvodit i na názorné úrovni. Mohli bychom určit třeba délku „poloměru kružnice", kterou je rovník: Ze středu kružnice (se souřadnicí $\theta = 0$) bychom šli po poledníku (φ = konst.) až po $\theta = \pi/2$ a z (9) dostali délku $l = R\,\pi/2$; podobně bychom určili obvod rovníku ($\theta = \pi/2$) tak, že bychom po něm šli od $\varphi = 0$ až po $\varphi = 2\pi$ a dostali délku $2\pi R$. Ovšem k pochopení, že (9) skutečně vystihuje další aspekty vnitřní geometrie sféry, je už opravdu potřeba užít diferenciální geometrii.

Abychom pořád nemluvili o „funkcích g_{ij}“, zavedeme už pro ně název, který se používá (v diferenciální geometrii i v obecné teorii relativity): jde o složky **metrického tenzoru**.[18]

Z toho, co jsme zatím poznali, vidíme, že metrický tenzor závisí jak na geometrii plochy, tak na volbě souřadnic. Přirozeně nás teď může napadnout otázka:

A jak tedy z metrického tenzoru poznáme, kdy jde o rovnou, a kdy o zakřivenou plochu?

Nutno říci, že „od oka“ to nepoznáme. Ovšem z metrického tenzoru lze sestrojit tzv. **tenzor křivosti** [19], a ten již rovné a zakřivené plochy rozliší. (Pro rovinu jsou všechny jeho složky rovny nule. Lze z něj také sestrojit tzv. *skalární křivost*, která má např. v případě sféry velmi názorný význam.[20])

Vztahy pro výpočet tenzoru křivosti zde nebudeme uvádět – pro další úvahy nám postačí konstatování, že obsahují derivace metrického tenzoru podle souřadnic, až do druhého řádu.

A teď pro více dimenzí …

Vztah (10), který jsme dostali pro plochy, můžeme přirozeně zobecnit i pro více dimenzí. Pro třírozměrný prostor bychom dostali

$$\left(\Delta l\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}\,\Delta x^i \Delta x^j \quad .^{21} \tag{14}$$

V euklidovském prostoru při použití kartézských souřadnic by samozřejmě složky metrického tenzoru byly $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1,\ g_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, složky ve sférických souřadnicích byste jistě dovedli napsat sami (zkuste si to).

Podstatné je, že podobně, jako uměl metrický tenzor popsat vnitřní geometrii zakřivené plochy, umí nyní popsat geometrii **zakřiveného prostoru**. A to aniž by tento prostor musel být nějak „pokroucen“ v nějakém prostoru vyšší dimenze!

Tohle je něco, co se laicky těžko chápe, ale matematika takto zakřivení popsat umí. Prostě, když z metrického tenzoru spočteme tenzor křivosti a zjistíme, že jeho složky jsou různé od nuly (nemusí být všechny, stačí některé), víme, že jde o zakřivený prostor, v němž neplatí euklidovská geometrie.

V takovémto prostoru můžeme třeba naměřit součet úhlů v trojúhelníku odlišný od 180°. Jak je tomu ve skutečném prostoru kolem nás? Uvádí se, že měření úhlů v trojúhelníku mezi vrcholy tří hor

[18] Opravdu tvoří tenzor, ale nemusíme se toho děsit (resp., pokud s těmito partiemi budete seznamovat třeba středoškoláky, nemusíte tím děsit je), bude nám tu stačit, že jde o veličinu se dvěma indexy.

Poznámka pro zájemce: Složky metrického tenzoru se také často zapisují v maticovém tvaru (na úrovni střední školy bychom s vědomím, že zjednodušujeme, snad mohli říci „ve formě tabulky“). Vztahy (11) až (13) se v této formě zapisují jako $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$, $g_{ij} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R\sin\theta \end{pmatrix}$. A pro případ, že byste na to narazili, ještě zmíníme, že místo čísel indexů se někdy píšou symboly příslušných souřadnic, takže třeba (13) pak vypadá takto: $g_{\theta\theta} = R,\ g_{\varphi\varphi} = R\sin\theta,\ \ g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0$.

[19] Nazývaný též *Riemannův tenzor křivosti*.

[20] Je rovna $2/R^2$, a to je opravdu názorné: sféra o menším poloměru je „více křivá“, než sféra o větším poloměru; srovnejte třeba křivost pingpongového míčku a zeměkoule…

[21] Přesnější by samozřejmě bylo vyjádření pomocí diferenciálů: $\left(dl\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}\,dx^i dx^j$.

prováděl už Carl Friedrich Gauss, v rámci přesnosti měření však nezjistil odchylku součtu úhlů od sto osmdesáti stupňů.[22] To však šlo o body vzdálené maximálně něco přes sto kilometrů. Dnes již z přesných astronomických měření, zmíněných už v předchozí kapitole, víme, že geometrie prostoru se například v okolí Slunce skutečně trochu liší od euklidovské.

A pro čtyřrozměrný prostoročas …

Konečně se dostáváme k teorii relativity![23] Začneme u **speciální teorie relativity** (STR).

Z STR víme, že prostor a čas lze přirozeně spojit do *čtyřrozměrného prostoročasu*. Roli, kterou v „obyčejném" třírozměrném prostoru hraje vzdálenost Δl, hraje v prostoročase ***čtyřinterval*** Δs. Jsou-li Δx, Δy a Δz, rozdíly souřadnic a Δt rozdíl časů dvou událostí, je

$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \ . \qquad (15)$$

? Je vám jasné, proč má čtyřinterval v prostoročase roli analogickou vzdálenosti v prostoru a jak souvisí například s vlastním časem hodin a šířením světelných signálů? Připomenout si tyhle věci můžete v Dodatku A.

My si teď vztah pro čtyřinterval přepíšeme tak, aby šel zobecnit do OTR. Souřadnice označíme (opět při použití horních indexů) $x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$. Vztah (15) pak můžeme zapsat jako

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu \ , \qquad (16)$$

kde $\eta_{\mu\nu}$ jsou složky *Minkowského tenzoru*: $\eta_{00} = -1,\ \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = +1,\ \eta_{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha \neq \beta$. Tento výraz je analogií vztahu (1) pro vzdálenost bodů v rovině, jen teď máme souřadnice čtyři místo dvou (a označujeme je řeckými indexy běžícími od 0 do 3) a u časové souřadnice je opačné znaménko (protože čas má oproti prostorovým rozměrům jiné postavení)[24].

Dosud jsme v prostoročase speciální teorie relativity. Ten není nijak zakřiven, proto se zde také říká, že jde o *plochý prostoročas.*

I v STR (tedy v plochém prostoročase) bychom však místo kartézských souřadnic x, y, z mohli použít jiné, a zapsat čtyřinterval třeba pomocí sférických souřadnic r, θ a φ:

$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta r)^2 + (r\,\Delta\theta)^2 + (r\sin\theta\,\Delta\varphi)^2 \ .^{25} \qquad (17)$$

Tento vztah zase platí jen přibližně, pro blízké události. Proto je vhodnější psát čtyřinterval pomocí diferenciálů; pak platí přesně:

$$(ds)^2 = -c^2(dt)^2 + (dr)^2 + (r\,d\theta)^2 + (r\sin\theta\,d\varphi)^2 \ . \qquad (18)$$

Tohle se nám bude za chvíli hodit pro porovnání s prostoročasem černých děr.

---

[22] Měření provedl mezi horami Brocken, Hoher Hagen a Inselsberg. V učebnici Kittel et al.: *Berkeley Physics Course 1, Mechanics,* se uvádí, že měření proběhlo při geodetických měřeních v letech 1821 – 1823 a odchylka součtu úhlů od 180° vyšla menší než jedna úhlová vteřina.

[23] Jste-li již předchozími odstavci znaveni, ještě chvilku vydržte. Za chvíli se nám to začne propojovat…

[24] Proto se také říká, že geometrie prostoročasu speciální teorie relativity je *pseudoeuklidovská*.

[25] Že toto platí, si laskavý čtenář jistě dovodí sám. ☺ (Stačí si vyjádřit prostorovou část. Vztah pro vzdálenost bodů na sféře už známe: $(\Delta l)^2 = (r\Delta\theta)^2 + (r\sin\theta\Delta\varphi)^2$ a k tomu přidáme v kolmém směru Δr.)

Zobecnění na zakřivený prostoročas (konečně…)

V obecné teorii relativity potřebujeme zakřivený prostoročas. Jak jej popsat? Analogicky, jako jsme vztahem (10) popisovali geometrii zakřivené plochy a vztahem (14) geometrii zakřiveného třírozměrného prostoru. Prostě místo Minkowského tenzoru ve vztahu (16) vezmeme **metrický tenzor** $g_{\mu\nu}$, který **vystihuje geometrii zakřiveného prostoročasu**:

$$\left(\Delta s\right)^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\,\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu} \ . \tag{19}$$

Říkáme, že tímto vztahem je popsána **metrika** zakřiveného prostoročasu. V učebnicích obvykle tento vztah najdeme zapsán pomocí diferenciálů a s využitím Einsteinova sumačního pravidla (kdy se přes opakující se indexy automaticky sčítá od 0 do 3) jako

$$\left(ds\right)^2 = g_{\mu\nu}\,dx^{\mu}dx^{\nu} \ . \tag{20}$$

Zdá se to moc abstraktní? Pojďme se podívat na konkrétní příklad.

Sféricky symetrické gravitační pole (příklad, který za chvíli využijeme u černých děr)

Mějme sféricky symetrické těleso o hmotnosti M. (Může jít třeba o Zemi nebo Slunce, když zanedbáme jejich rotaci a další odchylky od sférické symetrie.) Zakřivený prostoročas ***vně*** daného tělesa je pak popsán tzv. ***Schwarzschildovou metrikou*** [26]:

$$\left(ds\right)^2 = -c^2\left(1-r_g/r\right)\left(dt\right)^2 + \frac{\left(dr\right)^2}{\left(1-r_g/r\right)} + \left(r\,d\theta\right)^2 + \left(r\sin\theta\,d\varphi\right)^2 \ . \tag{21}$$

r_g je tzv. ***gravitační poloměr*** (nazývaný též *Schwarzschildův poloměr*),

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \ .^{27} \tag{22}$$

Nebudeme zde zdůvodňovat, jak lze dospět ke Schwarzschildově metrice – k tomu bychom museli řešit Einsteinovy rovnice.[28] Ale zkusme alespoň naznačit, **jak zakřivení prostoročasu souvisí s gravitačním polem**.

Z (21) vidíme, že složka g_{00} metrického tenzoru je $g_{00} = -c^2\left(1-r_g/r\right)$, a po dosazení (22):

$$g_{00} = -c^2 + \frac{2GM}{r} \ . \tag{23}$$

[26] Nazvána je podle německého astronoma *Karla Schwarzschilda* (1873-1916), který jako první našel sféricky symetrické řešení Einsteinových rovnic.

[27] G je gravitační konstanta a c rychlost světla; $2\,G/c^2 \doteq 1{,}5\cdot10^{-27}$ m/kg. S tím, co gravitační poloměr znamená, se budeme postupně seznamovat v dalších částech kapitoly.

[28] Ty svazují tenzor křivosti (resp. z něj vytvořený *Einsteinův tenzor*) s tenzorem energie a hybnosti hmoty (tedy látky a polí). V tomto textu nebudeme Einsteinovy rovnice explicite uvádět.

Ale GM/r je gravitační potenciál daného tělesa, jak ho známe z newtonovské fyziky! To znamená, že složka metrického tenzoru úzce souvisí s potenciálem gravitačního pole – fakticky v OTR *metrický tenzor nahrazuje gravitační potenciál*. Takže už tušíme, že popisem zakřivení prostoročasu opravdu můžeme popsat gravitační pole.[29]

A opravdu – pokud v prostoročase popsaném Schwarzschildovou metrikou (21) zkonstruujeme „nejpřímější čáry" (říká se jim **geodetiky**), zjistíme, že popisují například pohyb planet v poli Slunce (včetně toho, že z nich vyjde například správná hodnota posuvu perihelia dráhy Merkura, kde efekt OTR dělá 43 úhlových vteřin za století), ale i pohyb světelných signálů (a tedy ohyb světla v blízkosti Slunce, který jsme zmiňovali v kapitole 3). Slovy J. A. Wheelera: „Prostoročas říká hmotě, jak se má pohybovat."[30]

Jak moc je prostoročas zakřivený v blízkosti Země nebo Slunce? Málo. Pro Slunce je $r_g \doteq 3$ km, pro Zemi necelý centimetr. Člen r_g/r je tedy u Slunce menší než $5{\cdot}10^{-6}$, u Země dokonce menší než $1{,}5{\cdot}10^{-9}$. Porovnáním s metrikou plochého prostoročasu speciální teorie relativity (18) vidíme, že prostoročas v okolí Země a Slunce je opravdu zakřiven jen velmi málo. (I tak to ale stačí k tomu, aby kameny padaly na zem a planety obíhaly kolem Slunce.) Efekty OTR jsou proto v blízkosti Země a Slunce jen malé.

Že poměr r_g/r je rozumnou mírou efektů OTR, vidíme i z velikosti jevů, které jsme diskutovali v kapitole 3.[31] V případě Země jsme zmiňovali, že zpoždění hodin na povrchu Země oproti hodinám na satelitech GPS díky efektům OTR činí asi 46 μs za den. Oproti délce dne (86 400 s) je to relativně asi $5{\cdot}10^{-10}$. To se řádově shoduje s výše uvedeným poměrem $r_g/r \doteq 1{,}5{\cdot}10^{-9}$.[32]

V případě Slunce jsme zjistili, že ohyb světelných paprsků, které prochází kolem jeho okraje, činí 1,75 úhlové vteřiny. Když tuto hodnotu porovnáme například s pravým úhlem, dostaneme asi $5{,}4{\cdot}10^{-6}$, opět v dobré shodě s poměrem r_g/r.

V další části kapitoly se podíváme na situace, v nichž hraje OTR roli výraznější.

[29] Poznamenejme, že první derivace metrického tenzoru souvisí s gravitační silou a druhé derivace (z nichž je, jak víme, vybudován tenzor křivosti) se slapovými silami.

[30] Pro upřesnění: Toto je druhá část často citovaného výroku. První část zní „Hmota říká prostoročasu, jak se má zakřivovat.", tato část výroku odkazuje na Einsteinovy rovnice.

[31] Viz https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/FOS/. Gravitační rudý posuv a ohyb světla v gravitačním poli jsou diskutovány v kapitole 3. *Obecná teorie relativity: nástin východisek a jejich důsledků* konkrétně v části 3.3.

[32] Faktor zpožďování ve slabých gravitačních polích je $(1/2){\cdot}r_g/r$. Navíc zpožďování hodin na Zemi při porovnání s hodinami na družicích GPS je o něco menší než při porovnání s hodinami ve větší vzdálenosti od Země.

4.2 Bílí trpaslíci a neutronové hvězdy

Jak jsme uvedli, velikost efektů obecné teorie relativity v blízkosti planet, hvězd a podobných objektů[33] můžeme odhadnout jako poměr

$$\frac{r_g}{r}, \text{ kde } r_g = \frac{2GM}{c^2} , \tag{24}$$

kde r je poloměr tělesa a M jeho hmotnost. U stejně hmotných objektů je tento poměr zjevně vyšší pro menší tělesa. Porovnejme, jak tomu je pro hvězdu, jakou je naše Slunce, pro hvězdy, které známe pod názvem *bílí trpaslíci* a pro *neutronové hvězdy*. Přehled podává následující tabulka[34]. Pro porovnání v ní uvedeme i Zemi. Jde nám o řádové velikosti efektu, hodnoty proto uvedeme zaokrouhlené na jedno platné místo.

objekt	hmotnost M („typická“)	gravitační poloměr r_g	poloměr r („typický“)	r_g/r
Země	$6\cdot10^{24}$ kg	0,9 cm	$6\cdot10^{3}$ km	$1\cdot10^{-9}$
Slunce	$2\cdot10^{30}$ kg	3 km	$7\cdot10^{5}$ km	$4\cdot10^{-6}$
bílý trpaslík	$2\cdot10^{30}$ kg [35]	3 km	$6\cdot10^{3}$ km	$5\cdot10^{-4}$
neutronová hvězda	$3\cdot10^{30}$ kg	4 km	12 km	0,3

Bílí trpaslíci a neutronové hvězdy mají samozřejmě poloměry a hmotnosti v určitém rozmezí (za chvíli se s ním seznámíme), takže výsledné hodnoty r_g/r musíme brát jako řádové: v případě bílých trpaslíků jsou řádu 10^{-4} (nepřevyšují 10^{-3}), v případě neutronových hvězd dosahují desítek procent.

Bílí trpaslíci a neutronové hvězdy jsou mnohem menší než „obyčejné hvězdy“. Rozměry bílých trpaslíků jsou srovnatelné s rozměry Země, rozměry neutronových hvězd pak s rozměry nějakého města nebo třeba Mount Everestu[36]. Hustoty těchto hvězd zjevně musí být ohromné. Jak to, že takové objekty vůbec mohou existovat? A proč mají zrovna uvedené hmotnosti a rozměry?

Podíváme se, co tyto hvězdy drží v rovnováze. Začneme přitom od hvězd, jako je naše Slunce, a zamyslíme se, jaký bude jejich osud v závěrečných fázích jejich vývoje.

Poznámka
V následujících partiích začne přibývat poznámek pod čarou i odvození v hlavním textu. Jak již bylo uvedeno v úvodu, zejména při prvním čtení se podrobnostmi nemusíte rozptylovat. A obecně si prostě z textu vyberte to, co vám přijde zajímavé a užitečné (pro vaši výuku, diskusi s žáky, studenty či ostatními zájemci, nebo prostě pro vlastní poučení a uspokojení zvídavosti).

[33] Prostě, v blízkosti sféricky symetrických těles. Pro naše odhady můžeme zanedbat efekty spojené s rotací, bude nám tedy stačit znát hmotnost a poloměr příslušného (nebeského) tělesa.

[34] Velikost efektů OTR uvedenou v tabulce si můžete lehce spočíst sami (a mohou si to spočíst i vaši žáci). Po dosazení hodnot univerzálních konstant dostaneme $2G/c^2 \doteq 1{,}5\cdot10^{-27}$ m/kg a po dosazení hmotnosti Slunce $2GM_\odot/c^2 \doteq 3\cdot10^{3}$ m = 3 km.

[35] Bílí trpaslíci mají většinou hmotnosti o něco menší, (0,8 až 1,4)·10^{30} kg. Zde pro jednoduchost uvádíme hmotnost rovnou hmotnosti Slunce; takovou má například bílý trpaslík Sírius B. Jemu odpovídá i poloměr 6 tisíc km, uvedený v daném řádku tabulky.

[36] Pokud bychom vzali jeho výšku od hladiny moře nebo ode dna oceánů.

Statická sféricky symetrická hvězda – a její rovnováha

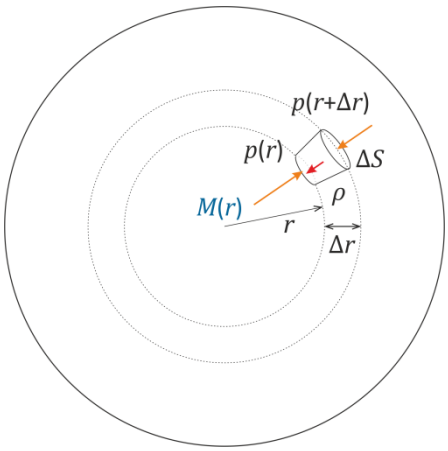
V našem seznamování se s vlastnostmi hvězd (zejména bílých trpaslíků a neutronových hvězd) budeme uvažovat nejjednodušší model: případ hvězdy, která je sféricky symetrická a s časem se prakticky nemění.[37] To znamená, že veličiny jako teplota, tlak a hustota budou záviset jen na vzdálenosti *r* od středu hvězdy:

$$T = T(r), \quad p = p(r), \quad \rho = \rho(r) \ . \tag{25}$$

Navíc každá část látky uvnitř hvězdy musí být v rovnováze, tedy celková síla působící na kterýkoli „kousek látky“ musí být rovna nule. Kdyby převládla síla směrem od centra, látka by byla urychlována směrem ven a hvězda by expandovala (kdyby to bylo velmi rychle, mohli bychom mluvit o explozi); pokud by síla směřovala k centru, hvězda by se smršťovala, v případě velmi rychlého děje bychom mluvili o zhroucení čili kolapsu.[38]

Látka ve hvězdě má charakter tekutiny, půjde nám tedy o hydrostatickou rovnováhu. Připomeňme si rovnici hydrostatické rovnováhy, která plyne z newtonovské fyziky.

Uvažujme vrstvu látky ve hvězdě mezi poloměry *r* a *r*+Δ*r*, přitom Δ*r* << *r*. Hustota látky ve vrstvě je *ρ*(*r*), tlak na vnitřní straně vrstvy *p*(*r*), tlak na vnější straně *p*(*r*+Δ*r*).



Ve vrstvě si zvolíme malý kousek ve tvaru válečku s plochou podstav ΔS, jak to ukazuje obrázek.[39] Síla působící na podstavu válečku bližší k centru je $F_1 = p(r)\,\Delta S$; síla působící na podstavu vzdálenější od centra je $F_2 = p(r+\Delta r)\,\Delta S$.[40] Kromě těchto sil působí na váleček i gravitační síla. Její velikost je $F_g = GM(r)\,\Delta m / r^2$, kde $M(r)$ je hmotnost části hvězdy od centra až do poloměru *r*,[41] a Δm hmotnost daného kousku látky, $\Delta m = \rho \Delta V = \rho(r)\,\Delta S\,\Delta r$.

Má-li být hvězda v rovnováze, pak celková síla (braná včetně orientace, např. od centra) musí být nulová, $F_1 - F_2 - F_g = 0$. Po dosazení tedy:

$$p(r)\,\Delta S - p(r+\Delta r)\,\Delta S - \left(GM(r)\,\rho(r)/r^2\right)\Delta S\,\Delta r = 0 \ .$$

Úpravou odsud získáme

$$\frac{p(r) - p(r+\Delta r)}{\Delta r} \ = \ G\frac{M(r)\,\rho(r)}{r^2} \ . \tag{26}$$

[37] Nebudeme tedy uvažovat například rotaci hvězdy ani detaily typu proudění látky, které například v našem Slunci vedou k řadě zajímavých důsledků typu period sluneční aktivity apod. Přesto náš jednoduchý model umožní popsat alespoň základní vlastnosti hvězd, o které nám půjde.

[38] Rovnováha statické hvězdy navíc zřejmě musí být stabilní; hvězda, která by se při nejmenším „pošťouchnutí“ zhroutila nebo naopak explodovala, by reálně nemohla existovat.

[39] Když Δ*r* a Δ*S* budou velmi malé, pak stěny „kousku“ budou prakticky rovnoběžné a opravdu ho budeme moci brát jako váleček a ne jako komolý kužel. Plochy obou podstav proto budou prakticky stejné, obě rovny Δ*S*.

[40] Jde o velikosti sil, obě síly mají radiální směr. Kam která síla náš váleček tlačí, je jasné a je to naznačeno i v obrázku.

[41] Celková gravitační síla od vnějších sféricky symetrických vrstev hvězdy na náš kousek látky je nulová, to víme z mechaniky. (Pozn.: Nezáleží na tom, zda hmotnost vnitřních vrstev budeme brát do poloměru *r* nebo do *r*+Δ*r* nebo do nějakého poloměru mezi těmito hodnotami. Rozdíl by byl řádu $(\Delta r)^2$ a tento rozdíl druhého řádu zanedbáváme; nakonec stejně budeme limitovat Δ*r*→0.)

Odtud je vidět kvantitativně, jak se na rovnováze podílí tlak a gravitace. Někdy se říká, že proti smršťování hvězdy působí tlak. Z (26) vidíme, že ve skutečnosti je to *gradient tlaku*: blíže k centru musí být tlak vyšší, dále od centra nižší.[42]

Když rozdíl tlaků označíme jako $p(r+\Delta r)-p(r)=\Delta p$, dostaneme z (26) $\frac{\Delta p}{\Delta r}=-G\frac{M(r)\,\rho(r)}{r^2}$, a v limitě $\Delta r\to 0$ pak

$$\frac{dp}{dr}=-G\frac{M(r)\,\rho(r)}{r^2}\ .\ ^{43} \qquad (27)$$

Toto je (*newtonovská*) *rovnice hydrostatické rovnováhy statické sféricky symetrické hvězdy*.[44]

Poznámka:

V obecné teorii relativity lze pro rovnováhu takové hvězdy odvodit analogickou rovnici:

$$\frac{dp}{dr}=-G\frac{\left(M(r)+4\pi r^3 p/c^2\right)\left(\rho+p/c^2\right)}{r\left(r-2GM(r)/c^2\right)}\ ^{45} \qquad (28)$$

Je známa pod názvem Tolmanova-Oppenheimerova-Volkovova rovnice, zkráceně *TOV rovnice*.

Vidíme, že struktura TOV rovnice je stejná jako newtonovské rovnice (27). Pro „normální“ hvězdy typu našeho Slunce ovšem nemusíme efekty obecné relativity uvažovat a i pro bílé trpaslíky dá TOV rovnice skoro stejné výsledky, jako (27).[46] U neutronových hvězd ovšem, jak už víme, dělají efekty OTR desítky procent, tam už je použití TOV rovnice na místě. Porovnáním (28) s (27) vidíme, že potřebný gradient tlaku je díky efektům OTR vyšší, než podle klasické Newtonovy teorie gravitace.

---

[42] Kdyby tlaky byly stejné, síly na obě podstavy našeho kousku látky by se vyrovnaly a gravitaci by nemělo co bránit ve stlačování hvězdy. (Pozn.: Toto je vám jistě jasné; podobné jednoduché komentáře zde přidáváme, abychom naznačili, jak lze výklad vést na elementární úrovni.)

[43] Hmotnost pod poloměrem r určíme integrací z hustoty: $M(r)=\int_0^r 4\pi\tilde{r}^2\rho(\tilde{r})\,d\tilde{r}$, rozmyslete si, že to tak je.

[44] Ufff, to je slov! Kdybyste chtěli učit fyziku tak, jak se to dělat nemá, tak můžete třeba středoškoláky nutit k tomu, aby se tenhle název naučili nazpaměť jako básničku… ☺ (Pardon, sem by patřil spíš smajlík ☹.) A vzorec (27) nazpaměť jako obrázek… Jistě je nám všem jasné, že mnohem lepší bude (s těmi zájemci, s nimiž tohle téma budete případně probírat), diskutovat třeba o tom, proč je v dané rovnici záporné znaménko (samozřejmě, protože tlak směrem od centra klesá), že je-li látka hvězdy hustší, tlak klesá rychleji apod.

[45] U tlaku a hustoty už zde explicite nepíšeme, že jde o hodnoty v místě vzdáleném *r* od centra hvězdy.

[46] Ve jmenovateli (28) je prakticky r^2 (s odchylkou řádu 10^{-4}) a poměr p/c^2 je rovněž velmi malý: Hustota bílého trpaslíka je řádu jednotek krát 10^9 kg/m^3, (ověřte si to výpočtem průměrné hustoty z hmotnosti a poloměru bílého trpaslíka), tlak v centru řádu jednotek krát 10^{22} Pa, takže p/c^2 je řádu 10^5 kg/m^3, takže oproti ρ můžeme tento člen zanedbat.

Proč se hvězda nehroutí ani nevybuchuje - a proč to nevydrží věčně

Odpověď otázku, proč se „normální“ hvězda nehroutí ani nevybuchuje, už nám daly předchozí odstavce: Gravitační přitahování k centru hvězdy je vyvažováno gradientem tlaku[47] díky tomu, že ve vnitřních vrstvách hvězdy je tlak vyšší, než ve vnějších. Ve hvězdě, jakou je naše Slunce[48], je tlak ve vnitřních vrstvách vysoký díky vysoké teplotě. A vysoká teplota je tam proto, že v centru hvězdy běží termojaderné reakce – ve Slunci je to syntéza hélia z vodíku.[49] Takto to běží (například ve Slunci) miliardy let.

Když většina vodíku „vyhoří“[50], hvězda se poněkud smršťí, teplota v jejím centru stoupne a začnou běžet další termonukleární reakce, vytvářející těžší prvky. Tyto procesy zde blíže popisovat nebudeme. Mohou být různorodé, probíhat buď v samotném centru, nebo vrstvách kolem něj, někdy explozivně, jindy dlouhodobě; hvězda sama přitom může výrazně měnit své rozměry (například se stát tzv. rudým obrem).[51]

Termojaderné reakce ovšem dávají energii při syntéze prvků s atomovým číslem menším než 56. [52] Pro syntézu těžších prvků je naopak třeba energii dodávat.

To znamená, že termojaderné reakce nedokážou energii ve hvězdě dodávat věčně. Navíc syntéza těžších a těžších prvků dodává stále méně energie.[53] A navíc ne ve všech hvězdách se postupně další a další reakce dokáží „zapálit“; závisí to na hmotnosti hvězdy. Opusťme teď detaily a položme si základní jednoduchou otázku:

? Když hvězda spotřebuje své termojaderné palivo, je něco, co dokáže udržet dostatečný tlak, aby gradient tlaku zabránil zhroucení hvězdy?

Naivně by si člověk mohl myslet, že kdyby se celá hvězda proměnila třeba v železo, tak se už dál hroutit nebude, protože železo je přece pevné. Ovšem například tlak v centru Slunce je řádu 10^{16} Pa, zatímco pevnost železa je řádu stovek MPa, i pro ocel nepřesahuje asi 10^{9} Pa. Takže železná koule o hmotnosti Slunce by se určitě zhroutila vlastní gravitací.

Takže – co nám příroda nabízí jiného, co by mohlo hroucení zastavit?

---

[47] Na úrovni střední školy bychom asi řekli *spádem tlaku*.

[48] A obecně ve většině hvězd s výjimkou bílých trpaslíků a neutronových hvězd.

[49] Je tomu tak nejen pro Slunce, obecně je termojaderná fúze vodíku zdrojem energie pro tzv. hvězdy hlavní posloupnosti. (Zájemce odkazujeme na přednášku Astronomie a astrofyzika a další zdroje, viz učebnice astronomie a astrofyziky i např. stránku Wikipedie https://en.wikipedia.org/wiki/Stellar_evolution a odkazy na ní uvedené.)

[50] Když tohle vykládáme žákům, je dobré dát si pozor, aby to někdo nepochopil tak, že vodík skutečně hoří, tedy slučuje se s kyslíkem… (V této souvislosti lze diskutovat o tom, jak dlouho by díky této chemické reakci Slunce vydrželo dávat výkon $4{\cdot}10^{26}$ W, který poskytuje. Zjistěte si spalné teplo vodíku a dopočítejte si to.)

[51] Zájemci mohou najít poučení například už na výše zmíněné stránce Wikipedie Stellar_evolution; v češtině je vývoj hvězd od jejich vzniku až po závěrečná stádia stručně a přehledně popsán například na stránce https://www.aldebaran.cz/astrofyzika/hvezdy/evolution.php . O nukleosyntéze ve hvězdách lze najít informace na stránce Wikipedie https://en.wikipedia.org/wiki/Stellar_nucleosynthesis a odkazech z ní. (K této stránce v době psaní tohoto textu zdá se neexistuje česká verze. Obecně bývají české verze stránek, např. o vývoji hvězd, na Wikipedii výrazně stručnější než anglické, je tedy vhodnější využívat verze v angličtině.)

[52] Největší vazebnou energii na nukleon má jádro železa $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$. Poznámka pro zájemce: Uvádí se, že ještě o něco větší vazebnou energii na nukleon má nikl, viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_binding_energy , ale v každém případě jde o prvky blízké železu, viz https://en.wikipedia.org/wiki/Iron_peak . Pro naše další úvahy však tyhle detaily nejsou důležité.

[53] To plyne ze závislosti vazbové energie na jeden nukleon na atomovém čísle.

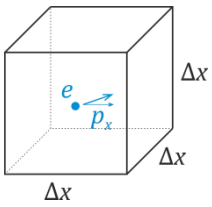
Co může vyvinout dostatečný tlak: elektronový Fermiho plyn

Jestliže se látka dostatečně stlačí, elektrony se uvolňují z atomů (tedy vazeb na jednotlivá jádra) a v látce se pohybují víceméně volně, jako částice plynu. Protože jde o fermiony, používá se pro něj název *elektronový Fermiho plyn*. V rozmezí hustot asi od 10^6 kg/m^3 do asi 10^{15} kg/m^3 je pro tlak v látce významný právě elektronový Fermiho plyn.[54]

Aby elektronový Fermiho plyn měl tlak, nemusí být zahřátý (!). Fakticky pod tzv. *Fermiho teplotou* T_F tlak elektronového plynu už prakticky nezávisí na teplotě. Takový elektronový plyn se označuje jako *degenerovaný*.[55]

Proč i chladný[56] elektronový plyn má tlak? A proč je jeho tlak, jak uvidíme, dokonce hodně velký? Je to proto, že elektrony se řídí kvantovou mechanikou. Přesně se tlak elektronového plynu počítá ve statistické fyzice; zde naznačíme jednoduché přibližné odvození, víceméně na středoškolské úrovni.

Jestliže je v látce N elektronů v objemu V, připadá na každý elektron objem V/N. Elektrony jsou fermiony a podle Pauliho vylučovacího principu tedy nemohou být dva ve stejném stavu. Můžeme si představit, že každý elektron v látce je v malé krychličce o straně $\Delta x = \sqrt[3]{(V/N)}$. Elektron zavřený v malé krychličce ovšem nemůže být v klidu. Podle Heisenbergova principu neurčitosti, když je jeho poloha určena s přesností Δx, musí mít jeho hybnost (v x-ovém směru) neurčitost Δp_x, přičemž $\Delta x \, \Delta p_x \geq \hbar/2$. Střední velikost složky hybnosti v x-ovém směru, $|p_x|$, je přitom dána právě neurčitostí Δp_x.[57] Dostáváme tedy



$$|p_x| \approx \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{29}$$

Střední velikost x-ové složky rychlosti je

$$|v_x| = |p_x|/m_e \,, \tag{30}$$

kde m_e je hmotnost elektronu. Můžeme si představit, že elektron se v krychličce odráží od pravé a levé stěny[58]; doba mezi následujícími odrazy od pravé stěny je $\Delta t = 2\Delta x/|v_x|$. Počet nárazů na danou stěnu za sekundu je tedy $1/\Delta t = |v_x|/(2\Delta x)$. Při jednom nárazu předá elektron stěně hybnost $2|p_x|$, za 1 sekundu tedy $2|p_x| \cdot 1/\Delta t = |p_x||v_x|/\Delta x$. Tomu je, podle první věty impulzové, rovna síla působící na stěnu krychličky. Tlak p získáme vydělením plochou stěny krychličky, tedy $(\Delta x)^2$.

[54] Uvědomte si, že uvedená dolní hranice hustot odpovídá tisíckrát větší hustotě, než má voda. I nejhustší známý prvek, osmium, má hustotu 22,59·10^3 kg/m^3. Aby se výrazně projevil tlak elektronového Fermiho plynu, musí být látka opravdu hodně stlačena.

[55] To není žádné pejorativní označení, jde o čistě technický termín. ☺

[56] Při podmínkách, které panují v bílých trpaslících, je Fermiho teplota řádu miliard Kelvinů – takže i elektronový plyn o teplotě stovek miliónů stupňů můžeme z hlediska degenerace vlastně brát za „chladný“.

[57] Platí $(\Delta p_x)^2 = \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2$. Přitom střední hodnota p_x je $\langle p_x \rangle = 0$, protože elektron se pohybuje střídavě doleva a doprava. Velikost složky hybnosti v x-ovém směru, $|p_x|$, bereme jako odmocninu se střední kvadratické složky hybnosti, $|p_x| = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}$.

[58] Ve skutečnosti myšlená krychlička v látce samozřejmě nemá stěny, jde o názorný model pro odvození tlaku. V tomto modelu by se samozřejmě elektron odrážel i od ostatních stěn, pro naši úvahu si stačí všímat jen pohybu ve směru jedné osy.

Dostaneme

$$p = \left|p_x\right|\left|v_x\right| \big/ (\Delta x)^3 \ . \tag{31}$$

Po dosazení (29) a (30) a vztahu pro Δx odtud plyne

$$p = \frac{\hbar^2}{4m_e}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{5}{3}} . \tag{32}$$

N/V je hustota počtu elektronů. Tu můžeme vypočítat z hustoty hmotnosti ρ látky hvězdy. Hmotnost je dána převážně nukleony. Počet nukleonů připadajících na jeden elektron označíme μ_e. (V látce hvězdy je přibližně dvakrát víc nukleonů, než elektronů, takže $\mu_e \doteq 2$.) Na N elektronů tedy připadá $\mu_e N$ nukleonů; jejich hmotnost je $\mu_e N m_n$ (kde m_n je hmotnost nukleonu[59]). Hustota látky je tedy $\rho = \mu_e N m_n / V$, odtud $N/V = \rho/(\mu_e m_n)$. Po dosazení do (32) vychází, že tlak závisí na hustotě jako

$$p = k\,\rho^{\frac{5}{3}} , \tag{33}$$

kde $k = \hbar^2/(4\mu_e^{5/3} m_e m_n^{5/3})$. Přesný výpočet pomocí statistické fyziky dává poněkud jinou hodnotu konstanty k,[60] ovšem závislost tlaku na hustotě látky vychází se stejnou mocninou: tlak je úměrný $\rho^{5/3}$.

Tento výsledek ovšem platí jen v případě, že se elektrony pohybují **rychlostmi malými v porovnání s rychlostí světla**. (Vztah (30) je vztah newtonovské fyziky!)

Z (29) je ovšem vidět, že při zvyšování hustoty roste hybnost elektronů. Rychlost elektronů ale nemůže přesáhnout rychlost světla, maximálně se jí může přibližovat. Při vysokých hustotách již tedy v_x ve vztahu (31) prakticky neroste – a můžeme si rozmyslet, že ve vztahu pro tlak tím přijdeme o faktor $\rho^{1/3}$. V *ultrarelativistickém* případě (kdy se elektrony pohybují téměř rychlostí světla) tedy tlak s rostoucí hustotou stoupá pomaleji, jen jako

$$p = \tilde{k}\,\rho^{\frac{4}{3}} \ .^{61} \tag{34}$$

Výpočet ze statistické fyziky ukáže, že relativistické efekty jsou podstatné při hustotách větších než asi $2\cdot10^9$ kg/m^3.

Jak si vymodelovat bílého trpaslíka

Bílí trpaslíci jsou hvězdy o hmotnostech zhruba hmotnosti Slunce a rozměrech srovnatelných s rozměry Země – tedy zhruba stokrát menších, než rozměr Slunce. Jejich hustota je tedy řádově miliónkrát vyšší, než hustota Slunce, čili řádu 10^9 kg/m^3. Tlak dostatečný k zamezení dalšího zmenšování v nich má právě elektronový Fermiho plyn. Po „vyhoření“ termojaderného paliva se jednou bílým trpaslíkem stane i naše Slunce.

Spočítat, jaké rozměry a jaké hmotnosti mohou mít bílí trpaslíci, si můžeme poměrně jednoduše na počítači, třeba v Excelu. Jak si takový numerický model bílého trpaslíka uděláme?[62]

---

[59] Rozdíl mezi hmotností protonu a neutronu zde zanedbáváme nebo vezmeme průměrnou hmotnost nukleonu.

[60] Vychází $k = (3\pi^2)^{2/3}\hbar^2/(5\cdot\mu_e^{5/3} m_e m_n^{5/3})$, což dá hodnotu skoro osmkrát vyšší, než jsme dostali naším jednoduchým odvozením. (Číselně vychází $k \doteq 1{,}0\cdot10^7\ \mu_e^{-5/3}$ Pa/(kg/m^3)$^{5/3}$.) Charakter závislosti tlaku na hustotě i na hmotnostech částic a poměru počtu nukleonů ku počtu elektronů nám však i uvedený silně zjednodušený přístup dal správně.

[61] Výpočet ve statistické fyzice dá $\tilde{k} = (3\pi^2)^{1/3} c\hbar/(4\cdot\mu_e^{4/3} m_n^{4/3}) \doteq 1{,}2\cdot10^{10}\,\mu_e^{-4/3}$ Pa / (kg / m^3)$^{4/3}$.

[62] Ideu numerického výpočtu zde uvádíme spíše pro zájemce, ale fakticky jde model, který lze prezentovat i pokročilejším středoškolákům.

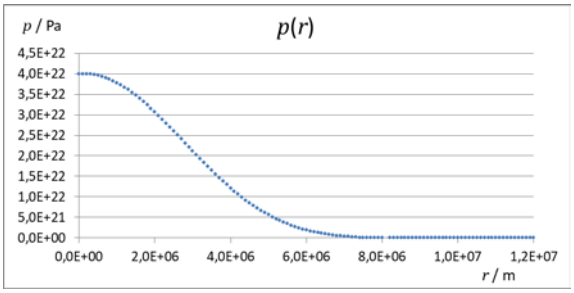
Náš model budeme počítat po krocích Δr radiální souřadnice, směrem od středu k povrchu.

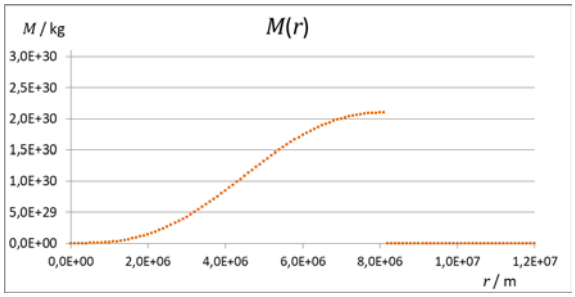
Začneme tím, že si zvolíme tlak, jaký bude v centru.[63] Z tlaku spočteme hustotu (vyjádříme ji ze vztahu (33) nebo (34) podle toho, jestli bereme klasický nebo ultrarelativistický případ) a z hustoty spočteme hmotnost vrstvy obepínající střed. (Těsně u středu to bude koule o poloměru Δr.) Z rovnice hydrostatické rovnováhy (27) určíme gradient tlaku a z něj pokles tlaku Δp. Tím jsme získali tlak pro $r = \Delta r$.

A dále už se vše opakuje: známe tlak $p(r)$ v místě vzdáleném r od centra. Z něj spočteme hustotu ρ a z ní hmotnost vrstvy o tloušťce Δr, ta bude $\Delta M = 4\pi r^2 \Delta r \rho$. Přičteme ji k hmotnosti M od centra do poloměru r.[64] A už máme vše pro pravou stranu rovnice hydrostatické rovnováhy (27), ta nám dá gradient tlaku $\frac{dp}{dr}$; pokles tlaku tedy bude $\Delta p \doteq \frac{dp}{dr}\Delta r = -G\frac{M\rho}{r^2}\Delta r$. A tlak ve vzdálenosti $r+\Delta r$ dostaneme jako $p(r+\Delta r) = p(r) + \Delta p$. Známe tady tlak v místě o něco dál od centra hvězdy … a vše opakujeme. Kdy skončíme? Až tlak poklesne k nule, to už jsme na povrchu hvězdy.

Excelovský soubor s výpočtem je uveden v příloze – jednak pro případ nerelativistického a jednak pro případ ultrarelativistického elektronového plynu. Opravdu dává realistické odhady velikosti a hmotnosti bílých trpaslíků.

Grafy ukazují průběh tlaku a hmotnosti pod daným poloměrem v závislosti na radiální souřadnici r pro model s nerelativistickým elektronovým plynem a tlakem v centru $4\cdot10^{22}$ Pa, který se uvádí jako tlak v centru Síria B:





Z našeho modelu vychází hmotnost asi $2{,}1\cdot10^{30}$ kg, což velmi dobře odpovídá. (Hmotnost Síria B se udává[65] asi 1,02 $M_\odot \doteq 2{,}03\cdot10^{30}$ kg.) Poloměr z našeho modelu vychází asi 8 100 km, což už tak dobře „nesedí“, protože poloměr Síria B bývá udáván 0,0084 $R_\odot \doteq$ 5 800 km. Náš model ovšem počítá s nerelativistickým elektronovým plynem – ale hustota v centru v něm vychází taková, že relativistické efekty už musí hrát roli.[66]

Pro naše úvahy zde nebudeme budovat model s přesným započtením relativistických efektů.[67] Minimálně řádově náš model funguje velmi dobře. Můžeme si s ním hrát a zadávat do něj různé tlaky v centru. Zjistíme zajímavou věc:

---

[63] V modelu, který je přílohou této přednášky, je jako základ zvolen tlak, který se uvádí jako tlak v centru hvězdy Sírius B, což je asi $4\cdot10^{22}$ Pa. (Lze ale volit i tlaky menší nebo větší.)

[64] Takže $M(r+\Delta r) = M(r) + \Delta M$.

[65] Viz např. Wikipedii https://en.wikipedia.org/wiki/Sirius , kde je u hmotnosti odkaz na článek v *The Astrophysical Journal* z roku 2017, viz https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/aa6af8.

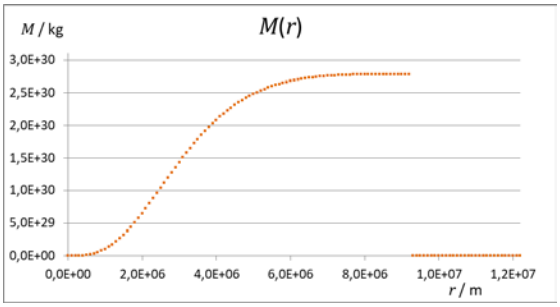
[66] To, že relativistické efekty vedou při stejné hmotnosti bílého trpaslíka k nižšímu poloměru, je vidět třeba z grafu na https://en.wikipedia.org/wiki/White_dwarf#/media/File:ChandrasekharLimitGraph.svg .

[67] V něm by závislost tlaku na hustotě byla složitější, protože by musela postihovat přechod mezi nerelativistickým a ultrarelativistickým případem.

Bílí trpaslíci s větší hmotností mají menší poloměr![68] Závislost poloměru na hmotnosti je zhruba $R \sim M^{-1/3}$.

Ovšem **mohou mít bílí trpaslíci libovolně velkou hmotnost?**

Kdyby byl elektronový plyn pořád nerelativistický, tak by opravdu mohl udržet libovolnou hmotnost proti gravitačnímu kolapsu. Ovšem v případě ultrarelativistického elektronového plynu tlak narůstá s hustotou pomaleji, jen jako $\rho^{4/3}$, viz (34). A když si „pohrajeme" s modelem, v němž plyn je ultrarelativistický,[69] zjistíme, že ať centrální tlak volíme, jaký chceme, nikdy se hmotnost nedostane nad asi $2{,}8 \cdot 10^{30}$ kg, tedy nad asi 1,4-násobek hmotnosti Slunce. Příkladem je graf s výsledkem modelu pro ultrarelativistický elektronový plyn a centrální tlak $4 \cdot 10^{23}$ Pa:



Vidíme, že existuje horní mez hmotnosti bílých trpaslíků. Jako první ji spočetl[70] indický fyzik Subrahmanyan Chandrasekhar[71], proto se tato mez nazývá **Chandrasekharova mez**. Jak už jsme uvedli, činí asi 1,4 $M_\odot$. [72]

Sírius B je k Zemi nejbližším a asi nejznámějším bílým trpaslíkem. Počet dosud objevených bílých trpaslíků však už jde do desítek tisíc.[73] Zřejmě všechny hvězdy s hmotností menší než asi 8 až 10 $M_\odot$ se nakonec stanou bílými trpaslíky. V závěrečných fázích vývoje se totiž zbaví většiny své hmoty, takže nakonec zbyde objekt s hmotností menší než Chandrasekharova mez.

Hmotnosti bílých trpaslíků se pohybují od 0,2 $M_\odot$ i méně až do uvedených asi 1,4 $M_\odot$, většinou však jsou v rozmezí asi 0,4 až 0,7 $M_\odot$.[74] Povrchová teplota bývá v rozmezí 8 až 40 tisíc kelvinů.[75] Bílí trpaslíci samozřejmě postupně chladnou, ovšem vzhledem k malé ploše povrchu je to pomalý proces.

[68] Není to zas tak nepochopitelné. Bílý trpaslík s větší hmotností díky větší gravitaci v sobě látku více stlačí, jeho poloměr se přitom může zmenšit. (A skutečně se zmenšuje.)
[69] Je ve stejném excelovském souboru v příloze.
[70] Nikoli na počítači, ale analytickým výpočtem.
[71] Uvádí se, že k prvním výsledkům dospěl už při plavbě lodí z Indie do Anglie, kam jel studovat do Cambridge. Bylo mu tehdy 20 let. (!) Za své teoretické práce o fyzikálních procesech důležitých pro strukturu a vývoj hvězd získal v roce 1983 Nobelovu cenu za fyziku. (Druhou polovinu v daném roce získal H. A. Fowler za experimentální a teoretické práce týkající se vzniku chemických prvků ve vesmíru.)
[72] Toto je limita spočtená pro sféricky symetrické bílé trpaslíky. Objevují se úvahy, že rychle rotující bílí trpaslíci by mohli mít i hmotnost vyšší.
[73] Příspěvek https://sci.esa.int/web/gaia/-/61343-shedding-light-on-white-dwarfs-the-future-of-stars-like-our-sun uvádí, že již bylo objeveno 30 tisíc bílých trpaslíků.
[74] Viz např. http://people.physics.tamu.edu/depoy/astr314/Notes/lecture10.pdf, kde najdete řadu informací o závěrečných fázích vývoje hvězd. V češtině jsou přehledné informace na https://www.aldebaran.cz/astrofyzika/hvezdy/final.php.
[75] U takovýchto hodnot je už jedno, jestli jde o kelviny nebo stupně Celsia…

Látka za ještě vyšších hustot

Hustota látky v bílých trpaslících je v rozmezí asi 10^7 až 10^{10} kg/m^3. Může nějaký mechanismus zabránit gravitačnímu zhroucení hvězdy při ještě vyšších hustotách?

Elektronový Fermiho plyn na to nestačí – výše jsme viděli, že neudrží v rovnováze hvězdu s hmotností vyšší, než Chanderasekharova mez. Navíc při vysokých hustotách začne být energeticky výhodné, aby proběhl tzv. inverzní beta-rozpad, tj. aby elektron reagoval s protonem; při této reakci vznikne neutron a neutrino.[76] Názorně si můžeme představit, že elektrony jsou „vtlačovány" do jader a reakcí s protony utvářejí neutrony. Elektronů tedy v látce ubývá, a to přirozeně tlak elektronového plynu snižuje.[77]

Při vysokých hustotách už je látka tvořena převážně neutrony, s malou příměsí protonů a elektronů. Neutrony přitom z atomových jader „odkapávají" a pohybují se v látce jako částice plynu. Ovšem jde také o fermiony – a ***neutronový Fermiho plyn*** tedy určitě má tlak, podobně jako tomu bylo u elektronového Fermiho plynu. Pro nerelativistický neutronový plyn závisí tlak na hustotě analogicky, jako tomu bylo ve vztahu (33):

$$p = \tilde{\tilde{k}}\,\rho^{\frac{5}{3}} \ , \tag{35}$$

kde $\tilde{\tilde{k}} \doteq 5,4\times10^3\ \mathrm{Pa}/(\mathrm{kg\,m^{-3}})^{5/3}$.[78] A právě tlak neutronového Fermiho plynu (resp. jeho gradient) je tím, co může zabránit dalšímu hroucení hvězdy při velmi vysokých hustotách řádu 10^{17} kg/m^3 a vyšších.

Není na to sám. Hustota asi $2{,}7\cdot10^{17}$ kg/m^3 je hustotou atomových jader.[79] Při vyšších hustotách je ***silná jaderná interakce nukleonů*** odpudivá a přispívá významně ke zvyšování tlaku.

Modelů, jak závisí tlak na hustotě při hustotách vyšších než jaderná hustota, tedy stavových rovnic $p = p(\rho)$, se uvažuje více.[80] Nemůžeme tedy zatím zcela jednoznačně vypočítat třeba závislost poloměru na hmotnosti neutronové hvězdy nebo maximální hmotnost neutronových hvězd (tak jak to šlo u bílých trpaslíků). Ovšem výsledky z jednotlivých modelů se podstatně (třeba řádově) neliší; navíc stavové rovnice si nelze vymyslet zcela libovolně.[81] Takže o vlastnostech neutronových hvězd nám mohou říci docela dost.

---

[76] „Normální" beta rozpad neutronu je reakce $n \to p + e + \bar{\nu}$. Tak se rozpadá například volný neutron. Inverzní proces je reakce $p + e \to n + \nu$. (Bývá též označován jako *elektronový záchyt*. Jako *inverzní beta rozpad* se totiž často označuje reakce protonu s antineutrinem za vzniku pozitronu a neutronu; terminologie se v různých zdrojích liší.)

[77] Přesněji řečeno, způsobí, že tlak neroste s hustotou tak rychle, jako kdyby elektronů neubývalo.

[78] Ze statistické fyziky vychází $\tilde{\tilde{k}} = (3\pi^2)^{2/3}\hbar^2/(5m_n^{8/3})$. Daný vztah platí pro *degenerovaný* neutronový Fermiho plyn, ovšem Fermiho teplota (pod níž je plyn degenerován, tedy „chladný"), je při hustotách, o něž nám půjde, vyšší než řádově 10^{11} K. Takže vnitřek neutronových hvězd můžeme i při teplotách řádu miliard kelvinů brát z hlediska degenerace jako „chladný".

[79] Neberte tento údaj absolutně, různé zdroje udávají hodnoty od 2,3 do 2,8 krát 10^{17} kg/m^3. Zde nám nejde o přesnou hustotu konkrétních atomových jader, ale o řádovou hustotu „jaderné látky".

[80] Na Zemi se samozřejmě nic s hustotou převyšující hustotu atomového jádra stabilně nevyskytuje, takže je těžké to experimentálně zkoumat. Je zajímavé, že o tom, které stavové rovnice lépe popisují chování látky za hustot převyšujících jadernou, mohou rozhodnout informace z pozorování vlastností neutronových hvězd. (Obecně se výsledky kvantové, částicové a jaderné fyziky užívají k vysvětlování procesů v nitru hvězd, zde naopak astrofyzikální pozorování mohou přinést informace fyzice zabývající se jadernou látkou.)

[81] Například z nich nesmí vycházet, že by rychlost zvuku v látce převyšovala rychlost světla.

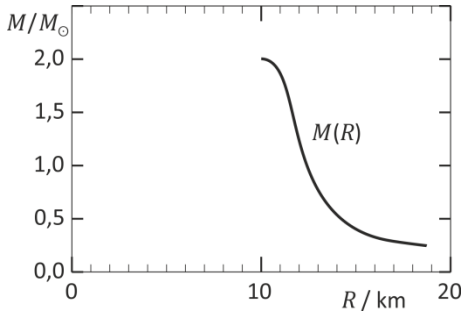
Neutronové hvězdy

Z modelů vychází, že aby neutronový plyn a nukleon-nukleonová interakce udržely hvězdu ve stabilní rovnováze (oproti gravitaci, která se ji snaží smrštit), musí být hustota řádově srovnatelná s jadernou (asi $3{\cdot}10^{17}$ kg/m^3) nebo vyšší. Názorně lze říci, že celá hvězda vlastně tvoří jedno obrovské atomové jádro, složené převážně z neutronů.

Pro hvězdu s hmotností 1,4 hmotnosti Slunce, tj. asi $3{\cdot}10^{30}$ kg, z toho vyplývá, že její objem musí být menší než zhruba 10^{13} m^3. Tomu odpovídá poloměr menší než asi 14 km. I když jde o značně přibližné úvahy,[82] vidíme, že neutronové hvězdy mohou mít poloměry jen něco přes deset kilometrů.

Počítat rozměry a hmotnost neutronových hvězd numerickým výpočtem by šlo v zásadě podobně, jako jsme to dělali u bílých trpaslíků. Pro výpočet gradientu tlaku bychom však museli použít TOV rovnici (28), kromě tlaku neutronového plynu (35) uvážit i tlak daný odpuzováním nukleonů a navíc počítat i s tím, že při vyšších hustotách jde o plyn relativistický.[83]

Z výpočtů vychází, že podobně jako u bílých trpaslíků větší hmotnosti neutronových hvězd odpovídá menší poloměr; pro realistické modely se ale pro různé hmotnosti poloměr příliš neliší. Typický průměr závislosti $M = M(R)$ ukazuje následující graf:[84]



Zájemci mohou najít podrobnější výklad a křivky pro různé realistické modely i ve zdrojích volně dostupných na webu.[85]

Minimální hmotnost, kterou modely dávají pro stabilní neutronové hvězdy, se uvádí okolo 0,1 $M_\odot$. Realistické scénáře vzniku neutronových hvězd ovšem vedou k vyšší minimální hmotnosti: reálně zřejmě mohou vznikat neutronové hvězdy s hmotností minimálně asi 1 $M_\odot$. (Viz např.[86].) Pozorovaná data ukazují, že neutronové hvězdy s hmotností jen o něco vyšší (např. 1,1 $M_\odot$) skutečně existují.

---

[82] Nerozlišovali jsme v nich třeba mezi centrální a průměrnou hustotou.

[83] Zájemce můžeme odkázat na článek R.R. SIblar, S. Reddy: *Neutron stars for undergraduates* v časopise American Journal of Physics, Vol. 72, No.7 (July 2004), p. 892-905; doi: 10.1119/1.1703544 – s tím, že i zde je popisován zjednodušený (pro výuku ev. samostatnou práci studentů vhodný) přístup.

[84] Je překreslen podle obr. 2 v článku citovaném v následující poznámce. Analogické grafy lze najít i v dalších zdrojích, např. v knize S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky: *Black holes, white dwarfs and neutron stars*, Wiley, 1983.

[85] Například v příspěvku J. M. Lattimera *Introduction to neutron stars*, AIP Conference Proceedings 1645, 61 (2015) na https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4909560. Jak už bývá časté, když se něco jmenuje „Úvod do …“, tak to bývá často text velmi podrobný, s mnoha odkazy na originální práce, a s mnoha partiemi čitelnými jen pro lidi, kteří se v oboru už vyznají. ☺ Výjimkou není ani daný devatenáctistránkový příspěvek; dá se v něm ovšem najít řada informací. Křivky $M(R)$ tam najdete v pravé části obrázku 3.

[86] L. Kaper et al.: *Measuring the Masses of Neutron Stars*. Dostupné na http://www.eso.org/sci/publications/messenger/archive/no.126-dec06/m126/m126-kaper.pdf. Wikipedie uvádí minimální hmotnost 1,1 $M_\odot$.

Pro ***maximální možnou hmotnost*** neutronových hvězd se užívá název Tolmanova-Oppenheimerova-Volkovova mez (***TOV mez***). Uvádí se pro ni hodnota asi 2 $M_\odot$ případně lehce vyšší, někdy až asi 2,3 $M_\odot$.[87] I v tomto případě jsou hmotnosti blízké tomuto maximu pozorovány.[88]

Většina neutronových hvězd se svou hmotností pohybuje mezi uvedenými extrémy, většinou v oblasti blízké 1,4 $M_\odot$.

Takže když to shrneme a přidáme ještě některé další vlastnosti:

- Hmotnosti neutronových hvězd jsou v rozsahu 1 až asi 2,2 $M_\odot$, „typická hmotnost“ je 1,4 $M_\odot$.
- Poloměr neutronových hvězd je asi 10 až 15 km; „typický poloměr“ je asi 11 až 12 km.
- Hustota látky v neutronových hvězdách je extrémní, převyšuje i hustotu v atomových jádrech.[89]
- Gravitační zrychlení na povrchu je řádově stomiliardkrát větší než na povrchu Země.[90]
- Magnetické pole neutronových hvězd je extrémně silné, 10^7 až 10^9 T.[91] Neutronové hvězdy s extrémně silným magnetickým polem zvané *magnetary* mají pole s indukcí až 10^{11} T.
- Krátce po svém vzniku je neutronová hvězda velmi horkým objektem, s teplotou stovek miliard stupňů. Rychle (v řádů dnů) ovšem zchladne na teplotu řádu miliard stupňů, pak už pomaleji (v řádu let) na teplotu řádově milión stupňů.

Když k tomu přičteme, že se uvažuje, že materiál neutronové hvězdy je supratekutý a má vlastnosti supravodiče, je jasné, že neutronové hvězdy jsou velmi zajímavé objekty.

Jak neutronové hvězdy vznikají: výbuch supernovy

Neutronové hvězdy vznikají z hvězd o hmotnosti asi 8 až 25 $M_\odot$. V závěrečné fázi jejich vývoje začne vlivem gravitace kolabovat jejich jádro o hmotnosti převyšující Chandrasekharovu mez. Je to proces velmi rychlý, fakticky volný pád. Až toto kolabující jádro dosáhne hustot řádu 10^{17} až 10^{18} kg/m^3 (tedy hustoty atomových jader nebo vyšší), je kolaps zastaven tlakem neutronového Fermiho plynu a odpudivými silami nukleon-nukleonové interakce. Ohromná energie získaná z tohoto „volného pádu“[92] se přemění na vnitřní energii, látka se tedy extrémně zahřeje. Na úkor této energie mohou probíhat reakce elementárních částic produkující vysokoenergetická neutrina. Ta se šíří ven a předávají svou energii obálce (zbytku hvězdy kolem zkolabovaného jádra). Navíc se z jádra šíří rázová vlna. Energie předaná obálce je tak velká, že obálka se přestane smršťovat a začne expandovat – a to velkou rychlostí, až řádu 10^4 km/s. Obálka je horká a září – na několik týdnů může převýšit svítivost

[87] Různé stavové rovnice dávají různé hodnoty maximální hmotnosti neutronových hvězd. Právě proto hodnoty hmotností neutronových hvězd zjištěné z astrofyzikálních pozorování mohou některé stavové rovnice vyloučit. Hodnota maximální hmotnosti neutronových hvězd bude nepochybně v budoucnu ještě upřesňována.

[88] Viz např. https://www3.mpifr-bonn.mpg.de/staff/pfreire/NS_masses.html.

[89] Při popularizaci by šlo třeba uvést, že čajová lžička (5 ml) tohoto materiálu by měla hmotnost pět miliard tun. ☺

[90] Uvádí se, že nejvyšší „hora“ na povrchu neutronové hvězdy, i když by byla z extrémně pevného materiálu kůry neutronové hvězdy, by mohla mít výšku maximálně 10 cm, větší by se vlastní tíhou propadla.

[91] Připomeňme, že horizontální složka zemského magnetického pole je 20 μT, indukce neodymových magnetů je něco přes 1 T, magnetické pole v přístrojích pro magnetickou rezonanci je řádu jednotek tesla a nejsilnější magnetické pole vytvořené v laboratořích nemá ani 100 T.

[92] Tedy fakticky na úkor gravitační potenciální energie.

celé galaxie. Celková vydaná energie se odhaduje až na 10^{44} J; to se rovná energii, kterou by naše Slunce vyzářilo se současným výkonem za 10 miliard let. Tento jev známe jako ***výbuch supernovy***.[93]

Rozpínající látka postupně chladne. Známým příkladem, kdy můžeme tuto látku pozorovat, je ***Krabí mlhovina***. Jde o pozůstatek výbuchu supernovy, kterou pozorovali čínští astronomové v roce 1054.

V dnešní době astronomické pozorování umožňuje zachytit a následně analyzovat při výbuchu supernovy mnohem více detailů, než pouhé zjištění, že se někde objevila superjasná „nová hvězda". Příkladem je pozorování supernovy **SN1987A** [94] ve Velkém Magellanově oblaku. V tomto případě dokonce detektory neutrin zachytily antineutrina emitovaná při výbuchu supernovy(!).[95] Energie odnesená neutriny se odhaduje na $2{\cdot}10^{46}$ J; uvádí se, že činí 99% celkové energie uvolněné při výbuchu supernovy.

Supernov již bylo pozorováno velmi mnoho, v posledních letech počty jejich pozorování stoupají doslova astronomickým tempem. Volně dostupný katalog jich (ke dni psaní tohoto textu) uvádí skoro 68 tisíc. [96]

A co samotné neutronové hvězdy? I ty pozorujeme, a to od roku 1967, kdy byly objeveny *pulzary*.

Pulzary

Pulzary byly objeveny díky radioastronomickým pozorováním. V roce 1967 byl objeven radiový zdroj, od něhož přicházely krátké pulzy s periodou asi 1,33 sekundy.[97] Pro pulzy s takto krátkou periodou nebyl znám žádný běžný zdroj, takže se prý chvíli uvažovalo, zda by nemohlo jít o signál mimozemské civilizace. Původně byl proto označen jako LGM-1.[98] Tato představa byla ale brzy opuštěna[99] a přijaté signály byly vysvětleny jako záření produkované rotující neutronovou hvězdou.

Pulzarů byly již objeveny téměř tři tisíce.[100] Jde o rotující neutronové hvězdy[101], perioda pulzů je dána periodou jejich rotace. Detaily mechanismu vyzařování jsou dosud předmětem výzkumů,

[93] Přesněji řečeno, supernovy typu Ib, Ic nebo II. Viz např. https://www.aldebaran.cz/produkty/2014_afsv/docs/2.pdf.

[94] Číslo v názvu označuje rok, kdy byla pozorována, písmeno A že jde o první supernovu pozorovanou v daném roce. Zpozorována byla 24. února 1987.

[95] Zachytily je nezávisle tři detektory neutrin. Celkem šlo jen o 25 neutrin, ale díky časové korelaci s optickým pozorováním se má za jasně prokázané, že zdrojem byl opravdu kolaps jádra hvězdy při výbuchu dané supernovy. Viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/SN_1987A a odkazy na této stránce uvedené, např. https://arxiv.org/pdf/0810.0466.pdf. Z uvedených zdrojů se můžeme poučit (nebo alespoň získat určitý dojem), do jakých detailů dnes astrofyzikové procesy při výbuchu supernovy popisují. A také zjistit, kolik je ještě v popisu celého procesu otevřených otázek.

[96] Viz https://sne.space/. Ne všechny supernovy ovšem vznikají kolapsem produkujícím neutronovou hvězdu.

[97] Pulzy měly délku 0,04 s. Zdroj objevila Jocelyn Bellová, doktorandka A. Hewishe. (Hewish dostal v roce 1974 Nobelovu cenu spolu s M. Rylem za „průkopnický výzkum v oblasti radioastronomie", Hewish konkrétně za „rozhodující roli v objevu pulzarů". Na J. Bellovou se cena nedostala – ale ve všech pramenech informujících o historii objevu pulzarů bývá uváděna jako objevitelka prvního.)

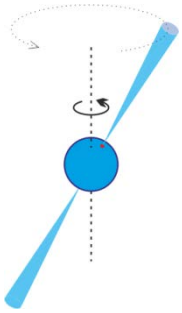
[98] LGM je zkratkou „little green men". (Představa mimozemšťanů jako „malých zelených mužíčků" tu byla mnohem dřív, než byla využita v reklamě… ☺)

[99] Ani podle současných astrofyzikálních názorů nelákají signály pulzarů na Black Friday. ☺ (Omlouvám se za nejapný vtip. Nápad, že by mohlo jít o mimozemské civilizace, byl definitivně opuštěn, když byl detekován druhý podobný signál, od dalšího objeveného pulzaru. Viz například https://en.wikipedia.org/wiki/PSR_B1919%2B21 a zdroje tam uvedené.)

[100] Volně dostupný katalog https://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/ jich ke dni psaní tohoto textu uvádí 2871.

[101] Uvádí se jediná výjimka: AR Scorpii, v tomto případě je pulzarem rotující bílý trpaslík.

obecně je však přijímán model, kdy zdrojem záření jsou „horké skvrny“ na povrchu neutronové hvězdy v místech „magnetických pólů“, kde rotující magnetické indukční čáry urychlují nabité částice. Záření je emitováno podél magnetické osy. Ta je nakloněna vůči ose rotace pulzaru. Úzký kužel záření se proto v prostoru otáčí podobně, jako světlo majáku – a vždy, když zasáhne Zemi, přijmou radioteleskopy krátký pulz. Schematicky to ukazuje obrázek.[102]



V již zmíněné Krabí mlhovině se nachází pulzar s periodou asi 33 ms. Září i v optickém a také v rentgenovém oboru spektra, až po gama-záření.[103]

Známy jsou i pulzary s kratší periodou. Zatím nejkratší pozorovanou má pulzar PSR 1748−2446ad, jen asi 1,3 ms. (Frekvence otáčení je tedy 716 Hz.) Nejdelší známá perioda je 23,5 s, má ji pulzar PSR J0250+5854.[104]

Slavný je pulzar PSR 1913+16. Jde o první objevený *binární pulzar*, tedy dvojhvězdu tvořenou neutronovými hvězdami.[105] Poskytl totiž první, byť nepřímý důkaz existence gravitačních vln. Podle obecné teorie relativity totiž dva kolem sebe obíhající objekty musí vyzařovat gravitační vlny. Ty odnášejí energii; v důsledku toho se obě složky dvojhvězdy k sobě musí pomalu přibližovat. U daného binárního pulzaru je přibližování významné, protože obě neutronové hvězdy jsou blízko sebe (jejich nejmenší vzdálenost je necelých 750 tisíc km, tedy srovnatelná s poloměrem Slunce) a doba oběhu je proto krátká (necelých 8 hodin). Hmotnost obou neutronových hvězd je přibližně 1,4 $M_{\odot}$.[106] „Významná změna“ periody ovšem znamená asi 76,5 μs za rok – ale i takovouto hodnotu se podařilo spolehlivě změřit. A co je důležitější, teoretická hodnota, kterou pro vyzařované gravitační vlny a z nich plynoucí změnu periody oběhu předpovídá obecná teorie relativity, se shoduje s hodnotou určenou z pozorování. Již dávno před tím, než byly gravitační vlny detekovány na Zemi, tedy podal binární pulzar PSR 1913+16 astrofyzikální důkaz, že tyto vlny opravdu existují. O významnosti tohoto důkazu svědčí fakt, že Hulse a Taylor byli za objev daného pulzaru odměněni v roce 1993 Nobelovou cenou.[107]

Jak leccos odvodit jednoduše

Výpočty struktury neutronových hvězd a dějů při kolapsu jádra hvězdy vytvářející neutronovou hvězdu a při výbuchu supernovy jsou samozřejmě velice složité. Nejde o „hotovou fyziku“, ale o současný aktivní výzkum.

Přesto nám o některých rysech těchto dějů mohou dát představu i přibližné řádové odhady vycházející z „běžné fyziky“, převážně z newtonovské mechaniky. Efekty OTR, jak jsme už uvedli, činí

[102] Mnohem hezčí obrázky najdete na webu, třeba na https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2612701.

[103] Příslovečný laskavý čtenář snadno najde spoustu detailnějších informací na webu, stačí zadat do vyhledávače „Crab pulsar“. Podobně i pro další zmiňované pulzary. Případně stačí vyjít ze stránky Wikipedie https://en.wikipedia.org/wiki/Pulsar. Tam najdete mimo jiné vysvětleno i označování pulzarů (a jak se s časem měnilo.)

[104] Jde o nejdelší známou periodu pulzaru, který je neutronovou hvězdou. Objekt AR Scorpii, kde pulzar je bílým trpaslíkem, má periodu skoro dvě minuty; jak už bylo uvedeno, jde o jediný známý objekt tohoto typu.

[105] Objevili ho v roce 1974 R. A. Hulse and J. H. Taylor, informace o něm lze proto najít i pod názvem „Hulse-Taylor pulsar“ nebo „Hulse-Taylor binary“.

[106] Rádiové signály přijímáme jen od jedné složky dané dvojhvězdy. Přijímaná data ale umožňují určit řadu parametrů daného systému.

[107] Nešlo samozřejmě jen o objev, ale také o léta měření a výpočtů z naměřených dat. Viz např. příspěvek Weisberga a Taylora https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0407149.pdf. Působivý je zejména graf na s. 4 daného příspěvku srovnávající teoretickou předpověď změny periody podle OTR s výsledky měření.

u neutronových hvězd až desítky procent – to ale na druhou stranu znamená, že přece jen ještě nejsme tak daleko od newtonovské teorie gravitace; proto ji můžeme pro přibližné odhady použít. Pojďme se proto podívat, co můžeme dostat z fyziky na úrovni střední školy, resp. prvního ročníku VŠ.

- Jak je to například s **energií výbuchu supernovy**?

Energie se zde získá na úkor gravitační potenciální energie.[108] Uvažujme těleso (jádro hvězdy, z něhož se stane neutronová hvězda) s hmotností M rovnou 1,5 $M_\odot$, tedy asi $3{\cdot}10^{30}$ kg, které má na začátku poloměr řekněme 10 tisíc km a zkolabuje na poloměr 10 km.

Newtonovský gravitační potenciál na povrchu tělesa o poloměru R je $\varphi_g(R) = -GM/R$. Hmotnost celé hvězdy je na tomto gravitačním potenciálu (nebo nižším[109]). Jednoduchá úvaha nám tedy napovídá, že gravitační potenciální energie tělesa můžeme odhadnout jako $V_g \approx \varphi_g M = -GM^2/R$. Přesný výpočet, i pro těleso s konstantní hustotou, je poněkud složitější, dává $V_g = -0,6\,GM^2/R$,[110] vidíme ale, že náš odhad je řádově v pořádku.[111]

Gravitační potenciální energie vzniklé neutronové hvězdy je tedy řádově

$$V_g \approx -GM^2/R \doteq -6,67\cdot10^{-11}\left(3\cdot10^{30}\right)^2/10^4\ \mathrm{J} \doteq -6\cdot10^{46}\ \mathrm{J}\ . \qquad (36)$$

Z výše uvedených upřesňujících poznámek je jasné, že hodnota 6 ve výsledku bude zřejmě reálně nižší, vidíme však, že jde o energii řádu 10^{46} J. Výše jsme uvedli pro energii odnesenou neutriny při výbuchu supernovy SN1987A hodnotu $2{\cdot}10^{46}$ J. Vidíme, že gravitační smrštění látky neutronové hvězdy opravdu takovouto energii poskytne.[112]

- Na jak velkou **teplotu** zahřeje tato energie materiál vznikající neutronové hvězdy?

Vydělíme-li hmotnost 1,5 $M_\odot \doteq 3{\cdot}10^{30}$ kg hmotností neutronu (asi $1,67{\cdot}10^{-27}$ kg), dostaneme celkový počet neutronů, asi $1,8{\cdot}10^{57}$. Z celkové uvolněné energie (řádu 10^{46} J) tedy na jeden neutron připadá řádově 10^{-11} J. Odpovídající teplotu T dostaneme vydělením Botzmannovou konstantou $k \doteq 1,38{\cdot}10^{-23}$ J/K.[113] Výsledkem je několikanásobek 10^{11} K; tedy skutečně teplota řádu stovek miliard kelvinů.

- **Jak rychlý je kolaps jádra hvězdy** vytvářející neutronovou hvězdu?

Když gravitace v jádru převáží tlak elektronového Fermiho plynu, rychle se stane dominantní a kolaps je v podstatě volným pádem. Uvažujme „kousek látky“, který ze vzdálenosti řádově r_1 = 10^4 km od středu hvězdy padá do r_2 = 10 km. Přitahuje ho hmotnost jádra hvězdy M = $3{\cdot}10^{30}$ kg. Jeho zrychlení

[108] Přesněji řečeno, díky poklesu gravitační potenciální energie.

[109] Jde o potenciál uvnitř tělesa.

[110] Laskavý čtenář si může příslušný výpočet provést sám, nebo si ho sám nalézt na webu. (No dobře, je například na adrese https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_binding_energy; můžete se přesvědčit, že jde opravdu o výpočet na úrovni prvního semestru.)

[111] Někdy se pro odhad gravitační potenciální energie uvádí ještě „hrubší“ úvaha: Těleso o poloměru R a hmotnosti M nahradíme dvěma hmotnými bodu o hmotnostech $M/2$ vzdálených o charakteristický rozměr tělesa, tedy o R. Potenciální energie této dvojice hmotných bodů je $-G(M/2)(M/2)/R = -0,25GM^2/R$, což je stále řádově shodné s naším odhadem.

[112] Nezapomněli jsme v našem odhadu na gravitační potenciální energii látky před smrštěním do neutronové hvězdy? (Význam v daném procesu přece má *rozdíl* potenciální energie!) Samozřejmě energii před smrštění musíme uvažovat – ale protože energie závisí na poloměru jako 1/R, jde při původním poloměru deseti tisíc kilometrů o energii tisíckrát menší, než (36); můžeme ji v našem řádovém odhadu bez problémů zanedbat.

[113] Střední energii částice bereme jako $E \approx kT$. (Faktor typu 3/2 v našich řádových odhadech nemusíme uvažovat.)

na začátku pádu je tedy $a = GM/(r_1)^2 \doteq 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^{30}/10^{14}\ \mathrm{m/s^2} \doteq 2 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s^2}$. I kdybychom počítali s konstantním zrychlením této velikosti, tak ze vztahu $s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{2s/a}$ vyjde, že dráhu 10^4 km = 10^7 m urazí náš kousek látky za zhruba 3 sekundy. Ve skutečnosti při pádu zrychlení narůstá, takže čas kolapsu jádra je ještě kratší.

- Jaká je **rychlost expanze obálky** při výbuchu supernovy?

Energie expandující obálky je řádu 10^{44} J.[114] Pokud hmotnost expandující látky odhadneme na několik hmotností Slunce, tedy řekněme m = 10^{31} kg, pak ze vztahu pro kinetickou energii $E_k = ½\, m\, v^2$ dostaneme $v^2 = 2\, E_k/m$ a odtud rychlost necelých 5 tisíc km/s.[115]

- **Jak velké mohou být pulzary**?

Perioda signálů od pulzarů je dána periodou jejich rotace. Je-li úhlová rychlost rotace ω, je dostředivé zrychlení na „rovníku“ pulzaru $R\ \omega^2$, kde R je poloměr pulzaru. Dostředivé zrychlení ale musí být menší než gravitační zrychlení GM/R^2, jinak by látka na povrchu pulzaru odlétla pryč. Musí tedy být $R\omega^2 < GM/R^2 \Rightarrow R^3 < GM/\omega^2 = GM/(4\pi^2)T^2$, kde T je perioda rotace pulzaru. Pro hmotnost pulzaru M = $3 \cdot 10^{30}$ kg vychází asi R < 1 700 km · (T/ 1 s)$^{2/3}$. Pro periody menší než sekunda musí tedy být poloměr pulzarů výrazně menší, než poloměr bílých trpaslíků – pulzary proto musí být neutronovými hvězdami.[116] Pro pulzar v Krabí mlhovině ($T \doteq$ 33 ms) vychází R < 170 km a pro nejrychlejší známý pulzar ($T \doteq$ 1,3 ms) R < 20 km.

- Proč pulzary **rotují tak rychle**?

Při kolapsu jádra hvězdy zřejmě můžeme předpokládat, že se jádro příliš „netře“ o vnější vrstvy, a že se tedy prakticky zachovává jeho moment hybnosti. Ten je $L = J \cdot \omega$. Moment setrvačnosti J je úměrný R^2 (R je poloměr jádra), úhlová rychlost je $\omega = 2\pi/T$ (T je perioda rotace). Z $L = \mathrm{konst.}$ tedy plyne, že $T \sim R^2$. Když se poloměr sníží tisíckrát (z 10 tisíc km na 10 km), zkrátí se perioda miliónkrát. Doba rotace „běžných hvězd“ je řádu dnů, tedy 10^6 s, takže i kdyby jádro hvězdy před kolapsem rotovalo s touto periodou, po kolapsu by mělo rotační periodu řádově 1 sekundu.[117]

- Proč mají pulzary tak **silné magnetické pole**?

Důvod je analogický jako v předchozím případě: velké těleso se „smrsklo“ na malé těleso. Magnetický indukční tok se přitom zachovává.[118] Jenže na začátku jde o tok velkou plochou (úměrnou R_0^2, kde R_0 je poloměr hvězdy), na konci o tok malou plochou (úměrnou R^2, kde R je poloměr pulzaru). Magnetická indukce se proto musí zvětšit v poměru $(R_0/R)^2$, aby tok $B \cdot S$ zůstal konstantní. Když se poloměr z několika stovek tisíc kilometrů zmenší (nejprve pomalu a pak rychlým kolapsem) na 10 km, zmenší se plocha řádově 10^9-krát; ve stejném poměru se tedy musí zvýšit magnetická indukce B.

[114] Jak jsme uvedli výše, celková energie uvolněná při gravitačním kolapsu je řádu 10^{46} J a 99 % energie odnesou neutrina.

[115] Jestliže se rychlé expanze účastní jen část odvržené obálky hvězdy, může být rychlost expanze vyšší.

[116] Výjimkou je už zmíněný objekt AR Scorpii, který má periodu necelé dvě minuty. Pro něj vychází, že poloměr musí být menší než asi 40 tisíc km – opravdu to tedy může být bílý trpaslík.

[117] Kratší periody lze patrně vysvětlit tak, že jádro ještě před kolapsem při předchozím stlačování zrychlovalo svou rotaci; rotace pulzarů také může být urychlována akrecí materiálu, který kolem pulzaru obíhal.

[118] Názorně můžeme říci, že ionizovaná látka s sebou unáší magnetické indukční čáry.

Hodnota magnetické indukce u „běžných hvězd“ bývá řádu desetin tesla, z toho vychází hodnota po kolapsu řádově 10^8 T. [119]

Další možnosti?

Je nějaký další stav látky, který by mohl při ještě vyšších hustotách zastavit další gravitační hroucení?

Při velmi vysokých hustotách již neutrony nebude možno považovat za oddělené částice a látka se tak vlastně bude skládat z jejich součástí, tedy z kvarků. Spekuluje se proto, že by mohly existovat hvězdy složené z kvarků, tedy *kvarkové hvězdy*. Jde však o hypotetické objekty, jejich existence nebyla dosud pozorováním prokázána. Zda opravdu existují a jaké by měly vlastnosti, je proto zatím otevřenou otázkou.

[119] Uvádí se, že pro nárůst magnetické indukce se uvažují i další mechanismy. U magnetarů se uvádí, že zesílení pole je díky „efektu dynama“.

4.3 Černé díry

Když má hvězda na konci svého vývoje hmotnost větší než asi 25 $M_\odot$, má její jádro hmotnost větší než TOV-mez, tedy než maximální možná hmotnost neutronových hvězd. Při gravitačním hroucení proto vzájemné odpuzování nukleonů gravitační kolaps nezastaví, a ten pokračuje dál.

Když se kolabující jádro smršťí tak, že jeho poloměr je $2GM/c^2$, kolaps už určitě nejde zastavit – podle TOV rovnice (28) by k tomu byl potřeba nekonečně velký gradient tlaku. Výsledkem je objekt, který již vůbec nelze popsat klasickou newtonovskou mechanikou – *černá díra*.

Trochu historie – aneb opravdu nejde černou díru popsat newtonovsky?

V jistém smyslu o existenci „něčeho jako černá díra" spekulovali už fyzici v rámci newtonovské fyziky. John Michell[120] v roce 1783 přišel s myšlenkou, že by mohly existovat hvězdy tak hmotné, že by z nich nemohlo uniknout jejich vlastní světlo. (Nazýval je „temné hvězdy".) Myšlenka je v zásadě jednoduchá:

Úniková rychlost z povrchu tělesa o poloměru R a hmotnosti M je

$$v = \sqrt{2\frac{GM}{R}} \ .^{121} \tag{37}$$

Je-li $2GM/R > c^2$, je úniková rychlost větší, než rychlost světla. To znamená, že světlo z povrchu takové hvězdy nemůže nikdy doletět ke vzdálenému pozorovateli. Ten proto danou hvězdu nemůže vidět, bude pro něj „černá".[122]

Aby taková situace nastala, musí být

$$R < \frac{2GM}{c^2} \ . \tag{38}$$

Náhodou zde vychází stejná hodnota, jako máme v TOV rovnici nebo ve Schwarzschildově metrice (21), viz Schwarschildův poloměr (22). Je to ale opravdu spíš náhoda, vlastnosti černých děr rozhodně nelze popisovat newtonovsky.[123]

Proč se světlo nemůže dostat z černé díry a jak je to s prostorem a časem v okolí černých děr i uvnitř nich, to nám pomůže pochopit Schwarzschildova metrika. Popisuje totiž prostoročas sféricky symetrické nenabité černé díry; ta se nazývá **Schwarzschildova černá díra**.

Pojďme se proto podívat blíž na její vlastnosti.

---

[120] Anglický kněz a přírodovědec, 1724-1793. Byl to on, kdo navrhl experiment pro měření gravitačního přitahování olověných koulí a sestrojil aparaturu, kterou pak k tomuto pokusu použil H. Cavendish.

[121] Nemusíme asi připomínat, že se tato rychlost spočte ze zákona zachování energie, $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$, ani proč, má-li hmotný bod o hmotnosti m „právě uletět do nekonečna", je na pravé straně daného vztahu nula; jde o analogii výpočtu druhé kosmické rychlosti.

[122] Michell používal výraz „*dark star*".

[123] V uvedené newtonovské situaci by se světlo dostalo kus nad povrch hvězdy a teprve pak by „spadlo zpátky". Jak uvidíme, podle OTR se z černé díry světlo nemůže dostat vůbec, „ani o kousek".

Vlastnosti Schwarzschildovy metriky

Připomeňme si, jak Schwarzschildova metrika (21) vypadá:

$$\left(ds\right)^2 = -c^2\left(1-r_g/r\right)\left(dt\right)^2 + \frac{\left(dr\right)^2}{\left(1-r_g/r\right)} + \left(r\,d\theta\right)^2 + \left(r\sin\theta\,d\varphi\right)^2 \ ; \tag{39}$$

Schwarzschildův poloměr je

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \ . \tag{40}$$

Význam souřadnic

Se souřadnicemi θ a φ je to jednoduché, jde o normální sférické souřadnice, jak je známe z běžného euklidovského prostoru.

Souřadnice r je **radiální souřadnice**. Ale pozor, nemůžeme říci, že jde o vzdálenost od centra $r = 0$, takhle jednoduché to není. Význam souřadnice r zjistíme například, když do (39) dosadíme t = konst. (takže $dt = 0$), r = konst. (takže $dr = 0$) a $\theta = \pi/2$ (takže $d\theta = 0$). Dostaneme $\left(ds\right)^2 = \left(r\,d\varphi\right)^2$, čili $ds = r\,d\varphi$. Hodnota ds je „kousek vzdálenosti“, a to po kružnici v rovníkové rovině.[124] Když sečteme všechny „kousky vzdálenosti“[125], dostaneme obvod kružnice; vyjde jednoduše $o = 2\pi r$. **Radiální souřadnice r je** prostě **obvod kružnice r = konst. dělený 2π**. [126]

Proč nemůžeme říci, že r je vzdálenost od centra? Vzdálenost v radiálním směru dostaneme z metriky (39) tak, že do ní dosadíme t = konst., θ = konst. a φ = konst. Výsledkem je $\left(ds\right)^2 = \left(dr\right)^2/(1-r_g/r)$, takže (pro $r > r_g$): $ds = dr\Big/\sqrt{1-r_g/r}$. To znamená, že „kousek vzdálenosti“ ds je *větší* než dr. Navíc pro $r < r_g$ je „všechno jinak“, k tomu se ještě vrátíme.

A co **časová souřadnice**? Pro pozorovatele, který se vzhledem k černé díře nehýbe (tedy na r = konst., θ = konst. a φ = konst.) plyne z (39) $\left(ds\right)^2 = -c^2\left(1-r_g/r\right)\left(dt\right)^2$. Pro vlastní čas pozorovatele přitom platí $(d\tau)^2 = -\left(ds\right)^2/c^2$, takže

$$d\tau = \sqrt{1-r_g/r}\ dt \ . \tag{41}$$

Vidíme, že pro $r \to \infty$ je $d\tau \to dt$, tedy přírůstky vlastního času pozorovatele a souřadnicového času t jsou stejné. Je tedy už jasné, co je čas t: je to **čas pozorovatele v nekonečnu**. Reálně tedy: čas stojícího velmi vzdáleného pozorovatele.

Ze vztahu (41) také vidíme, že stojícím pozorovatelům, kteří jsou blíže k černé díře, plyne čas pomaleji.[127] Pokud bychom dosadili $r = r_g$, dá vztah (41) $d\tau = 0$. Takže bychom si mohli říci, že čas pozorovatele, který je v klidu na $r = r_g$, se zastavil. Ale může zde pozorovatel opravdu stát?

---

[124] Jde o křivku r = konst., $\theta = \pi/2$. (Mohli bychom vzít libovolnou křivku s centrem v $r = 0$, protože metrika je sféricky symetrická.) Připomeňme, že čtyřinterval $(ds)^2$ zde má prostorový charakter, takže ds je prostě vzdálenost.

[125] Tedy zintegrujeme $\int_0^{2\pi} r\,d\varphi$.

[126] Podobně bychom význam r mohli dostat z faktu, že plocha sféry r = konst. je $S = 4\pi r^2$. Obě úvahy souvisí s tím, že geometrie sféry r = konst. je euklidovská; členy $\left(r\,d\theta\right)^2 + \left(r\sin\theta\,d\varphi\right)^2$ ve Schwarzschildově metrice jsou stejné, jako v prostoročase speciální relativity, viz (18).

[127] Pozorovatelům, kteří se pohybují, také, ale to zde rozebírat nebudeme.

Fotony letící od černé díry

Pro částice letící rychlostí světla musí být čtyřinterval $(ds)^2$ rovný nule – viz konec Dodatku A.[128] Pokud půjde o fotony vyslané radiálně směrem od černé díry, bude $d\theta = 0$ a $d\varphi = 0$, Takže (39) dá

$$0 = \left(ds\right)^2 = -c^2\left(1-r_g/r\right)\left(dt\right)^2 + \frac{\left(dr\right)^2}{\left(1-r_g/r\right)} \tag{42}$$

Odtud plyne $\left(dr\right)^2 = \left(1-r_g/r\right)^2\left(c\,dt\right)^2$, tedy

$$\frac{dr}{dt} = \left(1-\frac{r_g}{r}\right) c \ . \tag{43}$$

Hodně daleko od černé díry, pro $r \to \infty$, je $\frac{dr}{dt} \to c$, takže foton se prostě vzdaluje rychlostí světla. Ovšem pro r blízké rg je rychlost vzdalování menší, a pro $r = rg$ je $\frac{dr}{dt} = 0$, takže foton zůstává „sedět“ na místě o souřadnici rg.

Horizont černé díry

Ploše (sféře) o radiální souřadnici $r = r_g = \frac{2GM}{c^2}$ se říká **horizont** černé díry.[129] Můžeme ho považovat za hranici černé díry. Výše jsme odvodili, že foton, vyslaný na horizontu směrem ven, od černé díry, zůstává na horizontu, je tedy vůči černé díře i vůči vzdálenému pozorovateli v klidu.

Možná námitka:

Přirozeně se může objevit námitka, že foton se přece pohybuje rychlostí světla. Jak tedy může zůstávat v klidu?

Foton se skutečně pohybuje rychlostí c, tedy rychlostí světla.[130] Ale *vůči čemu* se pohybuje rychlostí c? Vůči inerciálním systémům. V gravitačním poli, jak už jsme rozebrali v předchozí kapitole, musí jít o *lokální inerciální systémy*[131] (viz též Dodatek B), například o lokální inerciální systém pozorovatele padajícího do černé díry.[132] Vůči takovému pozorovateli se daný foton opravdu pohybuje rychlostí světla – přesto vůči vzdálenému pozorovateli stojí.

Další možná námitka, resp. otázka:

Složka metrického tenzoru před $(dr)^2$ je $1/(1-r_g/r) = r/(r-r_g)$, pro $r \to r_g$ tedy diverguje. Neznamená to, že se na horizontu s pozorovatelem stane něco divného nebo strašného, že je třeba

[128] Přesněji bychom měli říci, že jde o čtyřinterval událostí spojených světelným signálem. Navíc, protože zde pracujeme s diferenciály, musí jít o události „nekonečně blízké“, prakticky tedy velmi blízké. (Pokud bychom tuto problematiku vykládali na úrovni střední školy, pracovali bychom zřejmě s konečnými rozdíly Δt, Δr apod., konečný by tedy byl i čtyřinterval $(\Delta s)^2$; zdůrazňovali bychom ale, že tyto rozdíly musí být velmi malé.)

[129] Toto platí pro sféricky symetrické nenabité černé díry. Pro rotující černé díry a pro černé díry s nábojem existují dokonce dva horizonty (říká se jim vnější a vnitřní), ale zde čtenáře odkážeme na učebnice OTR. Poznamenejme, že horizontu černých děr se přesněji říká *horizont událostí.*

[130] Ve vakuu, ale to ve Schwarzschildově černé díře a všude kolem ní je.

[131] Viz též Dodatek B.

[132] Jak uvidíme, takový pozorovatel by na svou zvídavost nakonec doplatil. Ale když to pozorovateli za ten zážitek stojí… Pokud vám přijde nehumánní uvažovat o pozorovateli, který skončí v černé díře, tak si představte nějaký automatický systém registrující, co se kolem něj děje a vysílající signály. Ale moc si ho nepersonifikujte, aby vám nakonec nebylo líto i toho automatu…

roztrhán? Nebo naopak stlačen do bodu, takže nemůže vysílat fotony, registrovat, co se kolem děje a podobně? Nebo neznamená zmíněná divergence, že by vrazil do něčeho jako zeď a nemohl pokračovat dál?

Neznamená. Slapové síly totiž divergují až pro $r \to 0$. Podrobnější rozbor ukazuje, že uvedené chování složek metrického tenzoru na $r = r_g$ je jen důsledkem toho, že Schwarzschildovy souřadnice r a t nejsou v okolí horizontu moc vhodné k popisu situace. Pozorovatel ve skutečnosti průchod horizontem ani nezaznamená,[133] z jeho lokálního pohledu se okamžik průchodu horizontem neliší od ostatních. Klidně může dál zkoumat okolí a vysílat světelné či radiové signály – jen tyto signály nikdy nedojdou k lidem, kteří zůstali vně černé díry. A co je podstatné: pozorovatel, který prošel horizontem do černé díry, se už nikdy nebude moci vrátit!

Horizont černé díry působí jako jednosměrně propustná membrána. Cokoli může projít dovnitř, ale nic (ani světlo) nemůže projít ven. Právě toto chování vedlo k názvu *černá díra*.

Pod horizontem

Proč se vlastně pozorovatel nemůže vrátit zpod horizontu?

Jednoduchá odpověď už plyne z výše řečeného: Na horizontu by se musel pohybovat rychlostí světla (vůči lokálním inerciálním systémům), aby se vůbec udržel na konstantním r. Už to je pro pozorovatele nemožné.[134] Aby se pohyboval směrem ven, musel by se pohybovat rychleji než světlo, a to nejde.

Pozorovatel pod horizontem, tedy na $r < r_g$, se navíc musí nutně pohybovat směrem k centru. Proč tomu tak je, nám napoví pohled na Schwarzschildovu metriku (39): Pod horizontem, tedy pro $r < r_g$ mají totiž složky metrického tenzoru u $(dt)^2$ a $(dr)^2$ opačná znaménka, než při $r < r_g$.

Nad horizontem je:

$$(ds)^2 = -c^2 \underbrace{\left(1 - r_g/r\right)}_{>0} (dt)^2 + \underbrace{\frac{1}{\left(1 - r_g/r\right)}}_{>0} (dr)^2 + (r\,d\theta)^2 + (r \sin\theta\, d\varphi)^2 \tag{44}$$

Pod horizontem ale:[135]

$$(ds)^2 = -\underbrace{\frac{1}{\left(r_g/r - 1\right)}}_{>0} (dr)^2 + c^2 \underbrace{\left(r_g/r - 1\right)}_{>0} (dt)^2 + (r\,d\theta)^2 + (r \sin\theta\, d\varphi)^2 \tag{45}$$

Vidíme, že souřadnice r a t si zde prohodily role: Pod horizontem je r časovou souřadnicí a t prostorovou souřadnicí. Pohyb směrem k centru je zde pohybem vpřed v čase (!). Pozorovatel nemůže zabránit pádu do centra stejně, jako my ve svém životě nemůžeme zastavit čas. A nemůže se pohybovat směrem k vyšším hodnotám r, stejně jako my se nemůžeme vracet v čase nazpět.

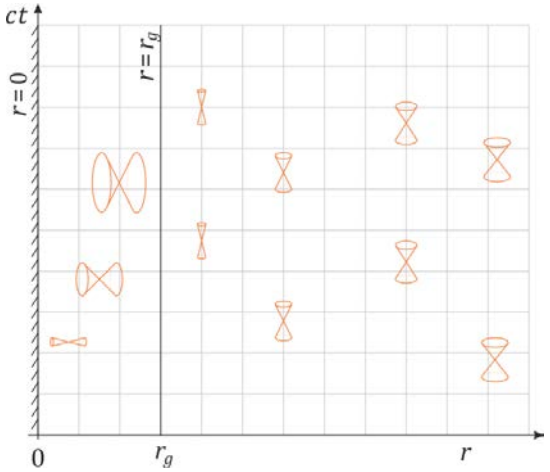
[133] Rozhodně zde nejsou nijak význačné slapové síly, které by mohly pozorovatele natahovat nebo stlačovat. Ve formalismu OTR se to „technicky" projeví tak, že i když složka metrického tenzoru na horizontu diverguje (mluvíme zde o tzv. *souřadnicové singularitě*), invarianty Riemannova tenzoru (a také složky Riemannova tenzoru v soustavě padajícího pozorovatele), které vystihují slapové síly, jsou zde konečné. Slapové síly opravdu divergují až pro $r \to 0$

[134] Protože má nenulovou klidovou hmotnost; rychlostí světla se mohou pohybovat jen částice s klidovou hmotností $m_0 = 0$.

[135] Zde záměrně píšeme člen s $(dr)^2$ jako první a píšeme $(1-r_g/r) = -(r_g/r-1)$ aby bylo prohození rolí r a t výrazně patrné.

Situaci pomůže osvětlit prostoročasový diagram, v němž vyznačíme světelné kužele. Ty ukazují šíření světelného signálu v daném místě a čase (tedy lokálně, v okolí příslušné události). Světočára vyznačující pohyb pozorovatele, automatické sondy nebo jakékoli částice s nenulovou klidovou hmotností musí vždy ležet uvnitř světelného kužele.

V prostoročasovém diagramu speciální teorie relativity[136] svírá plášť světelného kužele s časovou osou vždy úhel 45°.[137] V prostoročasovém diagramu OTR vystihujícím Schwarzschildovu metriku (39), v němž použijeme Schwarzschildovy souřadnice,[138] je tomu tak jen daleko od černé díry. Blíže k horizontu se světelné kužele zužují, na samotném horizontu vlastně degenerují v úsečky. Pro $r < r_g$ jsou světelné kužele otočené o 90 stupňů.



Pozorný čtenář (resp. „štouravý“ žák či student) by ale mohl vyslovit dvě námitky.

Námitka 1:

Jak víme, že pod horizontem směr „do budoucnosti“ míří směrem k centru, a ne od něj?

Ze samotného prostoročasového diagramu to nepoznáme. Ale pokud napíšeme pohybovou rovnici pro radiální pád pozorovatele a za čas zvolíme vlastní čas τ daného pozorovatele, můžeme ji vyřešit – a výsledkem je stále se zmenšující souřadnice r. Při průchodu horizontem se nic nezmění, τ roste a r se zmenšuje.

Druhou možností je použít jiné souřadnice, vhodnější pro popis v okolí horizontu, a nakreslit prostoročasový diagram v nich. K tomu se dostaneme za chvíli.[139]

Námitka 2:

Světelné kužele se v blízkosti horizontu zužují symetricky, takže se zdá, že těžké je nejen vzdálit se od horizontu, ale i se k němu přiblížit. Možná při pádu do černé díry při $r \to r_g$ jde čas t k nekonečnu. Neznamená to, že pozorovatel vlastně nikdy horizontem neprojde?

---

[136] Tedy bez gravitace, slovy OTR v plochém prostoročase.

[137] Na svislou osu přitom vynášíme *ct*. (Alternativně bychom mohli na svislou osu vynášet čas v sekundách nebo v rocích a na vodorovnou osu délku ve světelných sekundách resp. světelných rocích.) Pokud se světelný signál radiálně vzdaluje od centra *r*=0 nebo se k němu radiálně přibližuje, je jeho rychlost v radiálním směru $\frac{\Delta r}{\Delta t} = \pm c$, takže $\frac{\Delta r}{\Delta (ct)} = \pm 1$. Z toho je sklon světočar světelných signálů v prostoročasových diagramech STR dobře vidět.

[138] Na svislou osu opět vynášíme *ct*.

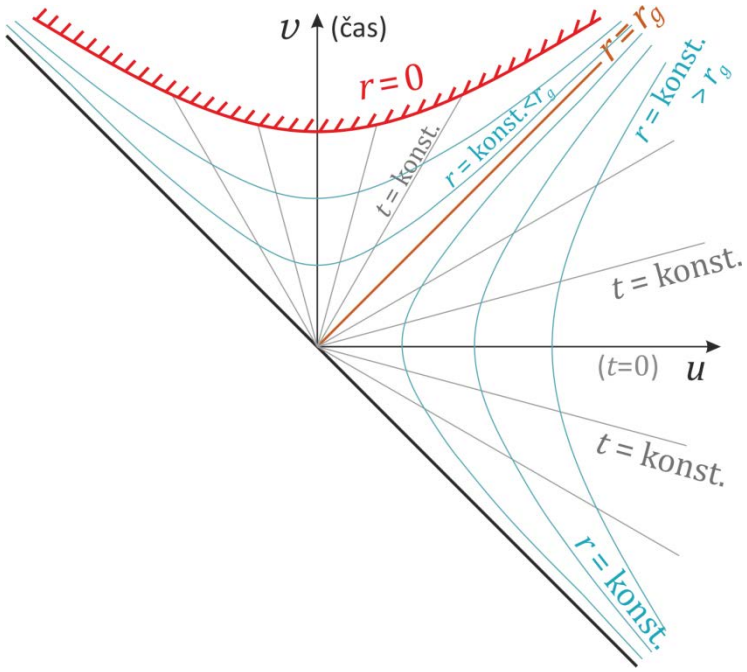
[139] Jednou možností by bylo použít čas τ padajících pozorovatelů a vhodně pozměnit radiální souřadnici. (Pro případ, že byste na daný popis narazili, těmto souřadnicím se říká *Lemaîtrovy*.)

Kdybychom spočítali pád pozorovatele nebo částice do černé díry, dostaneme opravdu $t \to \infty$ při $r \to r_g$.

Z pohledu vzdáleného pozorovatele či, chcete-li, z pohledu vnějšího vesmíru pozorovatel opravdu horizontem projde až v nekonečném čase. Ovšem, jak už bylo řečeno, pro pozorovatele samotného trvá pád do černé díry jen konečný čas.[140]

Lepší popis prostoročasu nad i pod horizontem: Kruskalův diagram

Pro názorný popis prostoročasu černé díry se často používá tzv. *Kruskalův diagram*. Místo Schwarzschildových souřadnic r a t používá jiné souřadnice, zvané *Kruskalovy* a označované u a v.[141] Souřadnice u má prostorový charakter, souřadnice v časový charakter, a to nad horizontem, tak pod ním. Transformační vztahy mezi Schwarzschildovými a Kruskalovými souřadnicemi zde nebudeme vypisovat,[142] vztah mezi nimi je patrný v samotném Kruskalově digramu:



V diagramu jsou vidět čáry konstantního r (mají tvar hyperbol) a konstantního t (jde o přímky resp. části přímek procházející počátkem). Horizont zde má speciální postavení: je jak čarou konstantního r ($r = r_g$), tak čarou $t = \infty$.

Pravá část digramu popisuje prostoročas nad horizontem, tedy vně černé díry, část digramu vlevo od čáry $r = r_g$ pak oblast pod horizontem, tedy vnitřek Schwarzschildovy černé díry. V této části je dobře vidět, že r je zde časovou souřadnicí, a že pád do $r = 0$ opravdu znamená pohyb vpřed v čase. Křivka $r = 0$ vyznačuje ***singularitu***, v níž divergují slapové síly. Z diagramu je vidět, že singularita není jen prostorový bod, jak se to zdálo být ve Schwarzschildových souřadnicích; prostoročas černé díry je zkrátka složitější.

---

[140] Pro černé díry s hmotností několikanásobku hmotnosti Slunce dokonce velmi krátký čas. Z místa o radiální souřadnici 3 r_g až do $r = 0$ trvá pád méně než 10 r_g/c; Pro černou díru s hmotností 10 $M_\odot$ je to méně než milisekunda. (To se pozorovatel po vnitřku černé díry ani pořádně nerozhlédne…)

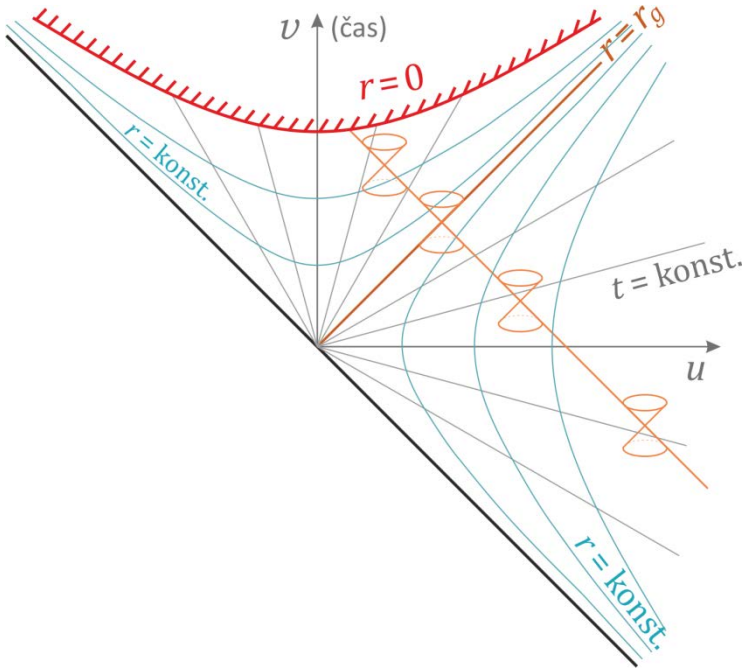
[141] Jsou nazývány též Kruskalovy-Szekerésovy souřadnice. Označení se v různých pramenech může různit (např. na příslušné anglické stránce Wikipedie je označují X a T).

[142] Zájemci je mohou najít v různých učebnicích OTR (a též v již postarších skriptech L. Dvořák: *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*), nebo i v internetových zdrojích včetně Wikipedie. (Hledejte heslo „Kruskal–Szekeres coordinates“.)

Za singularitu (tedy za křivku r = 0 v Kruskalově diagramu) už prostoročas „protáhnout“ nemůžeme, byť by to v digramu vypadalo lákavě, jít „do vyšších hodnot v“. V singularitě prostě světočáry všech částic končí. Alespoň z hlediska OTR – možná, že v těsné blízkosti singularity, ve skutečně extrémně silném gravitačním poli, začíná platit nějaká „nová fyzika“, o tom zatím nic nevíme.[143]

Pohyb fotonů a dalších částic padajících do černé díry – znázornění v Kruskalově diagramu

Jednou z výhodných vlastností Kruskalova diagramu je skutečnost, že světočáry fotonů jsou přímky svírající se svislou osou úhel 45°.[144] V následujícím diagramu je zobrazena světočára fotonu vyslaného vzdáleným pozorovatelem přímo do černé díry, přesně v radiálním směru. Jsou zde vyznačeny i světelné kužele.



Právě světelné kužele ukazují, že zpod horizontu se nejde dostat nazpět ven z černé díry. (Žádná částice se nemůže pohybovat rychleji než světlo – tedy mít v diagramu čáru, která by se odchylovala od směru svislé osy o víc než 45°.)

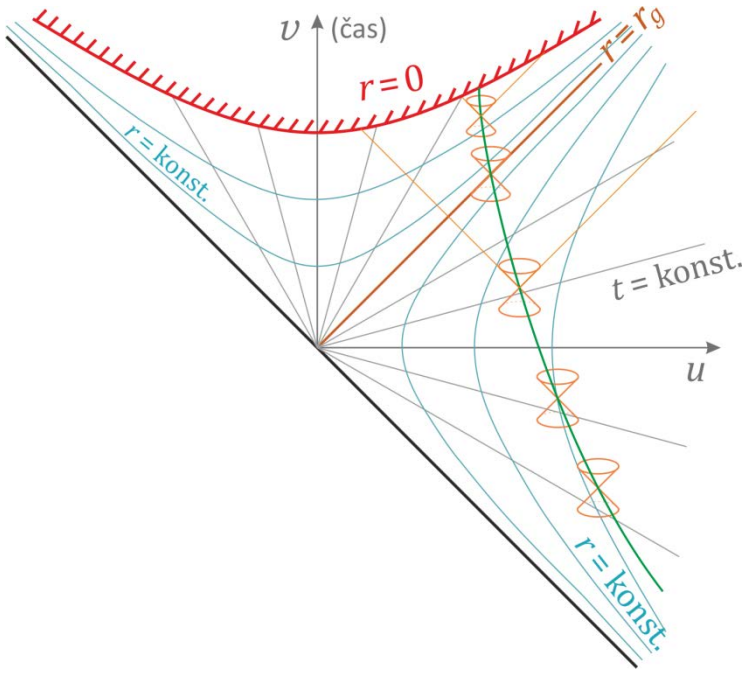
Možná ještě názorněji je to vidět, když do Kruskalova diagramu zakreslíme světočáru pozorovatele padajícího do černé díry, jak to ukazuje diagram na následující straně.[145]

[143] O singularitě uvnitř Schwarzschildovy černé díry se ale nemůžeme z vnějšího vesmíru nic dozvědět, protože je skryta pod horizontem. Podobně je tomu u obecnějších typů černých děr, byť tam by při překročení některých parametrů (konkrétně momentu hybnosti a/nebo náboje černé díry) mohly horizonty vymizet a singularita by byla vidět i pro vzdálené pozorovatele; takový (hypotetický) objekt se nazývá *nahá singularita*. Podle současného přesvědčení však platí tzv. *hypotéza kosmické cenzury*, podle níž jsou všechny singularity skryty pod horizontem.

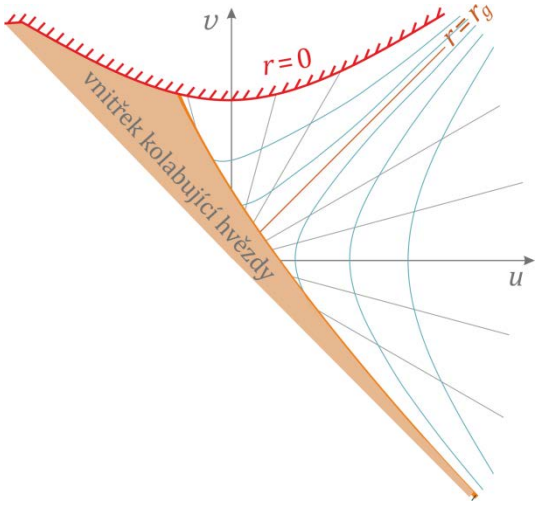
[144] Toto platí pro fotony radiálně padající do černé díry nebo radiálně se od ní vzdalující. Pohyb fotonů, které by mířily jinými směry, je samozřejmě složitější.

[145] Poznámka (a současně omluva pro ty, kdo mají rádi co největší precisnost): Světočára padajícího pozorovatele je zakreslena jen „symbolicky“, nejde o přesný tvar světočáry, který by vyšel výpočtem z příslušné pohybové rovnice. (Příslušný výpočet jde samozřejmě provést, dokonce analyticky, zájemci jej najdou v učebnicové literatuře.)

Na světočáře pozorovatele (zelená křivka) je vyznačeno několik světelných kuželů a také světočáry fotonů vyslaných pozorovatelem ve dvou okamžicích: jednou vně černé díry (tedy nad horizontem) a jednou pod horizontem. Je vidět, že světelný signál vyslaný radiálně ven z místa nad horizontem pokračuje do větších a větších r, to znamená, že světlo se od černé díry vzdaluje. Ovšem signál vyslaný zpod horizontu nutně končí v singularitě $r = 0$.



Při popisu skutečných černých děr si ovšem musíme uvědomit, že uvedené diagramy popisovaly situaci v případě, kdy všude bylo vakuum. U černé díry vzniklé gravitačním kolapsem ovšem bude vevnitř hvězdy metrika jiná a Kruskalův diagram popisuje jen prostoročas *vně* kolabující hvězdy. Jeho část tak bude „odříznuta“, jak (spíše symbolicky) ukazuje následující diagram:



Poznamenejme, že pokud by bylo všude vakuum, mohli bychom naopak Kruskalův diagram prodloužit do levé dolní poloviny, takové diagramy můžeme najít v literatuře a na internetu, viz též Dodatek C.[146] Teď se však raději podíváme na realističtější případy černých děr.

[146] Takový diagram popisuje i hypotetickou *bílou díru*.

Nesférický gravitační kolaps a co jím vznikne

Výše uvedený případ sféricky symetrické černé díry se může zdát příliš speciální. Skutečná hvězda jistě není přesně sféricky symetrická, už proto, že hvězdy rotují. Co když je výše popsaná Schwarzschildova černá díra jen nějakým ideálně jednoduchým modelem? A co když tedy singularita, která ve Schwarzschildově metrice je v r = 0, je jen důsledkem sférické symetrie? Třeba se při gravitačním kolapsu skutečné hvězdy jednotlivé částice prostě nějak minou, a tak divná věc, jako je singularita, vůbec nevznikne! A třeba nevznikne ani černá díra…

Takovéto úvahy fyzikové skutečně vedli až do šedesátých let minulého století. V roce 1965 však R. Penrose ukázal, že **singularita se nutně vyvine** už za velmi obecných předpokladů. Spolu s S. Hawkingem a dalšími pak daný přístup zobecnili v řadě *teorémů o singularitách*. Za svůj přínos v této oblasti byl Roger Penrose v roce 2020 oceněn Nobelovou cenou.[147] [148]

Jaké mohou být obecné černé díry?

Zajímavým výsledkem řady prací je zjištění, že černé díry musí být vlastně velmi jednoduché, a stačí je popsat jen třemi parametry (!).

Při gravitačním kolapsu se totiž prakticky všechny nesymetrie[149] jednak vyzáří pryč (gravitačními vlnami) a jednak „skryjí“ pod horizont. Výsledná černá díra je pak charakterizována jen třemi čísly:

- hmotností M,
- momentem hybnosti L,
- nábojem Q.

Žádné další charakteristiky už černá díra nemá.[150] Podle příslušných řešení Einsteinových rovnic nesou proto obecnější černé díry následující názvy (uvádíme i sféricky symetrické případy):

- Schwarzschildova černá díra (sféricky symetrická, charakterizována jen svou hmotností M),
- Reissnerova-Norströmova černá díra (sféricky symetrická, ale nabitá, charakterizovaná M a Q),
- Kerrova černá díra (rotující, nenabitá, charakterizovaná M a momentem hybnosti L),
- Kerrova-Newmannova (nabitá rotující černá díra, charakterizovaná M, L a Q).

Reálně zřejmě černé díry nemají významnější náboj, takže typickou černou dírou je **Kerrova**.[151]

---

[147] Zdůvodnění zní „za objev, že vytvoření černé díry je robustní předpovědí obecné teorie relativity“. (Nobelovu cenu získal spolu s Reinhardem Genzelem a Andreou Ghez; o nich se ještě zmíníme v souvislosti se superhmotnou černou dírou v centru naší galaxie.) Roger Penrose je velice tvůrčím matematikem a matematickým fyzikem, který občas přichází i s trochu nonkonformními myšlenkami, viz např. jeho knihu „Emperor’s new mind“ nebo v češtině vydanou „Makrosvět, mikrosvět a lidská mysl“. Přečíst si něco od něj rozhodně stojí za to.

[148] Že v teorémech o singularitách nejde jen o jeden nebo dva teorémy, se mohou zájemci přesvědčit například v článku na https://arxiv.org/pdf/1410.5226.pdf. Je přehledný, ale docela technický; o jeho záběru svědčí už to, že cituje 323 položek literatury…

[149] Technicky řečeno: nesymetrie popsané multipóly vyšších řádů.

[150] Toto tvrzení je známo jako „no-hair theorem“, tedy konstatování „černá díra nemá žádné vlasy“ – míněno další parametry než M, L a Q. Někdy se ovšem uvádí spíše jako domněnka („no-hair conjecture“). I když je totiž dokázáno za dosti obecných předpokladů, uvádějí se možné výjimky, například pokud by vstupovala do hry nějaká, zatím spíše hypotetická, fyzikální pole (uvádí se „nekomutativní Yang-Millsovo pole“ apod.). Daná problematika tedy ještě není plně uzavřena.

[151] Její metriku zde nebudeme uvádět, zájemci ji najdou v literatuře. Uvedeme jen, že Kerrova černá díra má vnější a vnitřní horizont, uvnitř vnitřního singularitu (ta je časového charakteru) a vně vnějšího horizontu oblast zvanou ergosféra, z níž by bylo možno dostávat energii na úkor rotace černé díry. Moment hybnosti Kerrovy černé díry je omezen, při překročení mezní hodnoty by se nejednalo o černou díru, ale o nahou singularitu.

Další vlastnosti černých děr

Fyzika černých děr je rozsáhlou oblastí relativistické astrofyziky a my zde můžeme uvést už jen pár střípků z jejích teoretických výsledků.

K zajímavým výsledkům vedla například úvaha, že pádem do černé díry mizí „neuspořádanost" věcí, které do ní padly – tedy entropie látky, která zmizela pod horizont.[152] To vedlo ke zjištění, že černé díry mají entropii, ta je úměrná ploše horizontu.[153]

Ovšem s entropií by měla být spojena teplota – černá díra, resp. její horizont by tedy měly mít určitou teplotu. Ale co má nenulovou teplotu, mělo by zářit. Protože černá díra pohlcuje vše, co na ni dopadne, včetně světla, chová se jako absolutně černé těleso. Měla by tedy jako absolutně černé těleso také zářit. Ale jak může zářit, když vše pohlcuje?

Hawkingovo záření

Tento zdánlivý rozpor vyřešil v roce 1974 Steven Hawking. Ukázal, že díky kvantovým efektům v blízkosti horizontu černé díry opravdu září, a že záření má charakter záření černého tělesa.[154] Pro černé díry hvězdných hmotností je ovšem toto *Hawkingovo záření* zcela zanedbatelné – černá díra o hmotnosti Slunce vyzařuje záření s teplotou ani ne 10^{-7} K. Pro hmotnější černé díry je teplota ještě nižší, teplota záření je totiž nepřímo úměrná hmotnosti černé díry.[155] I pro černou díru, která by byla ve vesmíru docela osamocena, by tedy nad vyzařováním o mnoho řádů převládlo pohlcování reliktního záření.[156]

Pro černé díry o malých hmotnostech (používá se název „minidíry") je ovšem vyzařování silnější a při dostatečně malé hmotnosti díry odnáší už významnou energii, tedy i hmotnost – a černá díra se tak postupně „vypařuje". Jde o zajímavý proces: černá díra vyzařuje, její hmotnost se zmenšuje, ale teplota přitom roste. Rychlost vypařování se tedy zvyšuje a celý proces by tedy měl skončit explozí, resp. zábleskem. Jde ovšem zatím jen o teoretickou předpověď.[157] Černé „minidíry" možná mohly vzniknout při velkém třesku; ty, které by měly počáteční hmotnost něco přes 10^{11} kg, by právě v současnosti, asi 14 miliard let po velkém třesku, měly být v konečné fázi vypařování. Zatím však žádné efekty tohoto typu nebyly pozorovány.

Jaké hmotnosti mohou mít černé díry?

O možných „minidírách" jsme se už zmínili. V současnosti však o nich nemáme žádné pozorovací důkazy.

Černé díry o hmotnostech **jednotek až desítek hmotností Slunce** mohou vznikat – a zřejmě vznikají – gravitačním kolapsem jader dostatečně hmotných hvězd.

---

[152] Hmotnost této látky nemizí: když „krmíte" černou díru padající hmotou (látkou nebo zářením), hmotnost černé díry roste.

[153] Toto zjištění je spojeno s pracemi J. Bekensteina začátkem sedmdesátých let.

[154] Názorně se tento *Hawkingův efekt* vykládá tak, že v blízkosti horizontu (vně černé díry) vznikají virtuální páry částice-antičástice (může jít i o dvojice fotonů). Slapové síly od sebe mohou tyto částice odtrhnout. Jedna částice z páru má zápornou celkovou energii a spadne pod horizont, druhá částice má kladnou celkovou energii a odletí od černé díry pryč. Zpod horizontu tedy nic neprochází ven, přesto z těsného okolí černé díry vyletují částice a odnášejí energii. Hmotnost samotné černé díry přitom klesá, díky tomu, že do ní padají částice se zápornou energií. (No není ta fyzika úchvatná?)

[155] $T \doteq 6{\cdot}10^{-8}$ K $\cdot(M_\odot/M)$

[156] Jde o mikrovlnné záření, které je pozůstatkem Big Bangu (velkého třesku) a dnes má teplotu asi 2,7 K.

[157] Otevřenou otázkou přitom zůstává, zda po finální explozi z černé díry něco zbyde nebo zda zmizí úplně.

Ve vesmíru ovšem mohou existovat i černé díry mnohem hmotnější. **Superhmotné černé díry** dokonce mohou vzniknout snáze než černé díry hvězdných hmotností. Proč tomu tak je, lze vysvětlit jednoduše:[158]

Jestliže těleso o poloměru R má průměrnou hustotu ρ, je jeho hmotnost $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Když za R dosadíme gravitační poloměr tělesa, tedy $2GM/c^2$, dostaneme $M = \frac{32}{3}\pi\left(G^3/c^6\right)M^3\rho$. Odtud můžeme určit průměrnou hustotu tělesa, jehož vnější okraj právě prochází horizontem – tedy tělesa, které se právě stává černou dírou. Dostáváme

$$\rho = \frac{3c^6}{32\pi G^3}\frac{1}{M^2} \doteq \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 2\cdot 10^{19}\ \ \mathrm{kg/m^3} \tag{46}$$

Pro těleso o hmotnosti Slunce jde o hustotu převyšující jadernou. Ovšem pro těleso s hmotností sto miliónů hmotností Slunce už je hustota jen dvojnásobkem hustoty vody! Gravitace tedy zjevně nemusí překonávat žádné extrémní tlaky, aby ke kolapsu do černé díry došlo.

Černé díry ve vesmíru – kde a jak je pozorujeme

Černé díry hvězdných hmotností

Osamocenou černou díru o hmotnosti jednotek až desítek $M_\odot$ v prázdném prostoru prakticky nelze detekovat. Nic nevyzařuje a okolí ovlivňuje jen svým gravitačním polem.[159]

Jinak je tomu v případě černé díry, která je složkou dvojhvězdy, kde druhou složku tvoří normální hvězda. Z pohybu této druhé složky můžeme zjistit, že obíhá kolem společného hmotného středu s neviditelným „průvodcem“, kterým je tedy nějaký kompaktní objekt. A hlavně – pokud jsou k sobě obě složky dvojhvězdy blízko, tak z normální hvězdy může přetékat látka k černé díře a padat do ní.

Nepadá ovšem přímo radiálně (díky momentu hybnosti, který má), ale obíhá kolem černé díry a vytváří tak disk – říká se mu ***akreční disk***.[160] V akrečním disku se látka díky viskozitě a stlačení zahřívá na velmi vysoké teploty, takže může zářit i v rentgenovém oboru spektra. A právě rentgenové záření proto může být indikátorem toho, že se v systému dvojhvězdy nachází černá díra – zejména, když je intenzita záření velmi rychle proměnlivá.[161]

Prvním kandidátem na černou díru v dvojhvězdě byl objekt **Cygnus X-1**. Jako rentgenový zdroj byl objeven již v roce 1964, podrobněji byl pozorován rentgenovým dalekohledem družice Uhuru vypuštěné v roce 1970 a následně bylo zjištěno, že je složkou dvojhvězdy.[162] Měření pohybu druhé složky umožnila určit hmotnost kompaktního objektu na více než 10 $M_\odot$, další měření vedla ke

[158] Pro naše jednoduché vysvětlení teď budeme používat odhady založené na newtonovské fyzice; dají nám dobrou základní představu. Navíc třeba vztah pro hmotnost tělesa, který použijeme, platí stejně i v OTR.

[159] Hawkingovo záření můžeme zanedbat. Gravitační pole černé díry sice zakřivuje světelné paprsky, ale pravděpodobnost, že by zrovna ve směru od Země byl za černou dírou zdroj světla, aby se projevil efekt gravitační čočky, je jen malá.

[160] Akrece je, jak nám vysvětlí třeba Wikipedie, „postupné dopadání látky na hvězdu, galaxii nebo jiný objekt…“. (Alespoň pokud se týká astronomie, obecně uvádí, že jde i o „navazování částic na schránky měkkýšů“; jak vidno, vždy jde o přidávání látky zvenku.)

[161] Je-li charakteristická doba, za kterou se intenzita záření významně mění, rovna T, lze usoudit, že objekt, který je zdrojem záření, musí být menší než cT. Krátká doba změn tedy znamená malý objekt.

[162] Pokud vás to zajímá, tak druhou složkou je hvězda HDE226868. Jde o veleobra, ten nemůže být zdrojem rentgenového záření.

zpřesnění na hodnotu (15±1) $M_\odot$.[163] Časová variabilita rentgenového záření je až na úrovni jedné milisekundy, takže rozměr kompaktního objektu musí být menší než 10^{-3} m·3·10^8 m/s = 300 km. Jde tedy o malý objekt, ale vzhledem ke hmotnosti nemůže jít o neutronovou hvězdu – jediná možnost, která zbývá, je černá díra. Ta vysvětluje všechny pozorované charakteristiky daného objektu.

Cygnus X-1 byla první objevenou černou dírou, ale nezůstala jedinou. Katalogy dostupné na webu uvádějí několik desítek kandidátů na černé díry.[164]

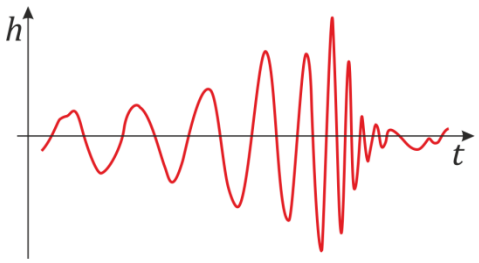
Navíc se od roku 2016 při hledání černých děr nemusíme omezovat na elektromagnetické záření. Novým „oknem do vesmíru" se totiž stala ***astronomie gravitačních vln***. A ta již přinesla o černých dírách mnoho cenných dat.

Gravitační vlny nás informují o srážkách černých děr

Existenci gravitačních vln teoreticky předpověděl už Albert Einstein. Jde vlastně o vlny prostoročasu. Vyzařují je například dvě tělesa obíhající kolem sebe. Ovšem při obězích například planet kolem Slunce je vyzařovaná energie nicotná.[165] Velmi hmotná tělesa, jejichž vzdálenost je malá, a obíhají tedy kolem sebe velkou rychlostí, mohou vyzařovat mnohem více.[166]

Gravitační vlny odnášejí ze systému energii. Obě tělesa se díky tomu k sobě přibližují, rychlost jejich oběhu proto vzrůstá a roste tedy i vyzařovaný výkon. Nakonec se obě tělesa srazí; v případě černých děr spolu obě díry splynou v jednu větší.

Teoretici dnes umí spočítat, jak vypadají gravitační vlny vyzařované při takové srážce černých děr.[167] Díky zkracující se periodě oběhu s časem roste frekvence vyzařovaných vln, roste také jejich amplituda. Výsledný signál, když by se převedl do zvukové podoby, připomíná „zacvrlikání",[168] také se mu tak říká.



Profil takové gravitační vlny ukazuje obrázek.[169] A právě takový signál zachytil detektor gravitačních vln LIGO v září 2015.[170] Ze zachyceného signálu je dokonce možno dopočítat hmotnosti srážejících se černých děr (!).

[163] Dnes se někdy jako výsledek dalších měření uvádí 14,8 $M_\odot$., viz např. https://www.nasa.gov/mission_pages/chandra/multimedia/cygnusx1.html.

[164] Například „BlackCAT" katalog (https://arxiv.org/abs/1510.08869 a http://www.astro.puc.cl/BlackCAT/) uvádí dnes 66 kandidátů na černé díry v rentgenových zdrojích v dvojhvězdách, z toho 18, jejichž parametry (zejména hmotnost) byly určeny měřením parametrů orbity dvojhvězdy, a uvádí je tak jako „dynamicky potvrzené" černé díry. Zahrnuje přitom jen tzv. transientní zdroje (které rentgenovsky září jen někdy), takže neuvádí třeba Cygnus X-1.
Počet kandidátů na černé díry i počet potvrzených případů se bude s časem určitě měnit.

[165] Například gravitační vlny, které vyzařuje Jupiter díky obíhání kolem Slunce, mají energii jen několik kW.

[166] Například binární pulsar PSR1913+16, jehož složky kolem sebe obíhají s periodou necelých 8 hodin, vyzařuje gravitačními vlnami výkon asi 7·10^{24} W.

[167] Srážkou zde myslíme zrychlující se vzájemné obíhání a následné splynutí.

[168] Anglicky *chirp*.

[169] Profil je překreslen z grafu na stránce https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/db/LIGO_measurement_of_gravitational_waves.svg. (Daný graf je převzat z článku uvedeného v následující poznámce.)

[170] Viz článek o první detekci gravitačních vln v časopise Physics Review Letters publikovaný 11. 2. 2016; dostupný je na https://physics.aps.org/featured-article-pdf/10.1103/PhysRevLett.116.061102.

Od té doby detektor LIGO[171], od roku 2017 i ve spolupráci s italským detektorem VIRGO, zachytil řadu podobných událostí. Jejich seznam se stále rozrůstá a dosahuje už několika desítek.[172] Počet bude nepochybně dále narůstat.

Z dosud zachycených signálů ze srážek jde ve dvou případech o srážky neutronových hvězd, v jednom případě zřejmě o srážku neutronové hvězdy s černou dírou; ve všech ostatních případech pak o srážky černých děr. Hmotnosti černých děr před srážkou, zjištěné z dat, jsou od asi 5 $M_\odot$ až po více než 60 $M_\odot$,[173] hmotnosti výsledných černých děr jsou samozřejmě vyšší.

Detekce gravitačních vln tak přináší nejen řadu nově objevených černých děr, ale i nové poznatky o jejich vlastnostech.[174]

Objevy dalších černých děr budou určitě následovat, vždyť počet černých děr v naší galaxii se odhaduje řádově na více než deset miliónů, možná až miliardu.[175]

Černé díry „prostředních hmotností“[176]

Tyto černé díry by měly mít hmotnosti stovek až desetitisíců $M_\odot$. Wikipedie již uvádí některé kandidáty, ovšem existence takovýchto černých děr, například v kulových hvězdokupách, je dosud předmětem výzkumu.[177]

Superhmotné černé díry

Superhmotné černé díry mají hmotnosti od stovek tisíc až do desítek miliard hmotností Slunce. Nacházejí se v jádrech galaxií a v kvazarech[178].

Superhmotná černá díra se nachází i v jádru naší galaxie; za její objev byla v roce 2020 udělena Nobelova cena.[179] Označuje se jako **Sagittarius A*** (zkráceně Sgr A*), od Země je vzdálena asi 26 tisíc světelných let směrem k souhvězdí Střelce[180]. Samotný objekt nelze pozorovat v optickém spektru, tomu brání pohlcování světla prachem, která se nachází v galaktické rovině mezi Zemí a galaktickým

[171] Jde o dva nezávislé detektory, v Livingstonu a v Hanfordu. Jejich signál se porovnává, což umožňuje vyloučit jiné vlivy působící na nesmírně citlivé detektory.

[172] V době psaní tohoto textu šlo o padesát zachycených signálů ze srážek kompaktních objektů. První katalog takto detekovaných srážek obsahoval 11 událostí; katalog GWTC-2, zveřejněný 27. 11. 2020, viz https://www.ligo.org/science/Publication-O3aCatalog/, k nim přidal dalších 39 srážek. Šlo o signály zachycené od 1. 4. do 1. 10. 2019 (Data se dlouho pečlivě prověřují a analyzují, než jsou finálně zveřejněna.)

[173] V jednom případě dokonce přes 90 $M_\odot$. Hmotnosti srážejících se černých děr (ev. neutronových hvězd) a hmotnosti po srážce přehledně ukazuje graf „hmotností na hvězdném hřbitově“, viz https://www.ligo.org/science/Publication-O3aCatalog/images/Stellar_Graveyard_noerror_GWonly.png.

[174] Novinkou je zjištění, že se mezi černými děrami vyskytují i díry s hmotnostmi přes padesát hmotností Slunce.

[175] Viz např. stránku NASA pro veřejnost https://science.nasa.gov/astrophysics/focus-areas/black-holes, kde se uvádějí i odkazy na nové objevy v této oblasti.

[176] *intermediate-mass black holes*, pokud o nich chcete vyhledat informace třeba Googlem.

[177] Přehledný článek (z června 2020) poskytující v úvodu informace i o supermasivních černých dírách viz https://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev-astro-032620-021835. (Pozn.: Pokud by vám nešel volně stáhnout, jeho verze z listopadu 2019 je k dispozici na https://arxiv.org/abs/1911.09678.)

[178] O těch bude zmínka ještě dále.

[179] Reinhardu Genzelovi a Andreje Ghez (každému čtvrtina Nobelovy ceny, druhou polovinu dostal Roger Penrose). V ocenění se poněkud opatrně konstatuje, že cena byla udělena za „objev superhmotného kompaktního objektu v centru naší galaxie“. Astrofyzikální komunita ale v zásadě nepochybuje o tom, že tímto kompaktním objektem je černá díra.

[180] Proto je v jejím názvu to Sagittarius.

jádrem. Objekt a jeho okolí lze naštěstí pozorovat v jiných vlnových délkách.[181] Signál v radiovém oboru z tohoto směru byl zjištěn už začátkem třicátých let 20. století, záření samotného kompaktního objektu pak v sedmdesátých letech.

Později byly měřeny pohyby hvězd v těsné blízkosti Sgr A*. Hvězda označovaná S2 má periodu oběhu asi 16 let a nejmenší vzdálenost od centra jen 120 astronomických jednotek (asi $1{,}8\cdot10^{13}$ m). Rychlost S2 při průchodu pericentrem[182] byla asi 7 700 km/s, tj. asi 2,5 % rychlosti světla. Z parametrů oběhu této a dalších hvězd lze určit hmotnost centrálního kompaktního objektu, činí asi 4 milióny $M_\odot$.[183] Radiová interferometrie na velmi dlouhé základně umožňuje určit, že poloměr centrálního objektu je menší než asi $2{,}2\cdot10^{10}$ m.[184] To je necelý dvojnásobek Schwarzschildova poloměru pro těleso dané hmotnosti. Je vidět, že superhmotným kompaktním objektem v centru naší galaxie opravdu musí být černá díra.

Dodejme, že díky infračerveným pozorováním lze dnes detekovat i plazmu obíhající kolem dané černé díry na poloměru jen asi 6× větším, než je její gravitační poloměr; změřená rychlost oběhu dosahuje až 30 % rychlosti světla.

Černé díry se zřejmě vyskytují v jádrech většiny, ne-li dokonce všech galaxií. A to i černé díry výrazně hmotnější, než v centru Mléčné dráhy. Například v jádru galaxie v Andromedě je černá díra o hmotnosti sto až dvě stě miliónů hmot Slunce (tj. řádu 10^8 $M_\odot$). A v jádru galaxie NGC4889 v souhvězdí Vlasy Bereniky dokonce o hmotnosti asi $2{,}1\cdot10^{10}$ $M_\odot$. V kvazarech jsou patrně černé díry ještě hmotnější.[185] Určování hmotností superhmotných černých děr je ovšem obtížné a je tedy dosud zatíženo značnými nejistotami.

První „fotografie“ černé díry

Objektem, který k sobě přitáhl pozornost, je černá díra **M87*** v jádře galaxie Messier 87.[186] Tato černá díra sice není nejmasivnější, má hmotnost „jen“ asi šest miliard hmotností Slunce[187], ale je první černou dírou, jejíž „fotografie“ byla pořízena a v dubnu 2019 obletěla svět. Nejde ovšem o

[181] Názorně, od radiových vln po rentgenové záření, to ukazuje stránka http://www.astro.ucla.edu/~ghezgroup/gc/journey/wavelength.html#optical.

[182] Tj. při nejmenší vzdálenosti od centrálního tělesa; nemůžeme použít termín „perihélium“, když nejde o obíhání kolem Slunce, a vlastně ani „periastron“, když centrálním tělesem není hvězda.

[183] Různé zdroje uvádějí mírně odlišné hodnoty. Na příslušné stránce Wikipedie se lze dočíst, že starší měření jedné skupiny dávala $(4{,}31\pm0{,}38)\cdot10^6$ $M_\odot$, jiné skupiny $(3{,}7\pm0{,}2)\cdot10^6$ $M_\odot$. Měření po průchodu pericentrem roku 2018 vedou k hodnotě asi $(4{,}15\pm0{,}014)\cdot10^6$ $M_\odot$, viz tabulku na str. 4 https://arxiv.org/pdf/1904.05721.pdf.

[184] Viz údaj v článku https://arxiv.org/pdf/2004.07187.pdf, kde se uvádí, že úhlový poloměr objektu při pozorování ze Země je menší než 18 miliontin úhlové vteřiny. (Dovedete si představit tak malý úhel? Po přepočtu na radiány je to asi $8{,}7\cdot10^{-11}$ rad. Názornější představu možná poskytne, když si spočteme, jak velký objekt bychom pod tímto úhlem viděli na Měsíci, vyjde něco přes 3 centimetry. Ta interferometrie na velmi dlouhé základně (*very long baseline interferometry*, zkratka VLBI) opravdu nemá špatné rozlišení, což?)
Poznámka: V daném článku (mimochodem: je z dubna 2020) najdete zobrazenou i trajektorii hvězdy S2, navíc uvádí, že byl poprvé změřen i posuv pericentra trajektorie dané hvězdy – a souhlasí s hodnotou, kterou pro danou trajektorii předpovídá obecná teorie relativity. (Měření samozřejmě zdaleka nedosahuje takové přesnosti jako při testech OTR ve Sluneční soustavě, přesnost činí jen asi 10 procent, ovšem jde o měření v úplně jiných podmínkách, poprvé v blízkosti černé díry.)

[185] Jako nejhmotnější najdeme v současných přehledech objekt TON618, kde se hmotnost uvádí $6{,}6\cdot10^{10}$ $M_\odot$.

[186] Tato galaxie se také uvádí pod označením NGC4486, kdybyste ji hledali… (Ale ve Stopařově průvodci po Galaxii ji asi nenajdete, opravdu je to jiná galaxie. Je to superobří eliptická galaxie, asi 54 miliónů světelných let od Země, v kupě galaxií v souhvězdí Panny.)

[187] Uvádí se hodnota $(6{,}4\pm0{,}5)\cdot10^9$ $M_\odot$.

fotografii v optickém oboru spektra, ale o obraz záření v radiovém oboru. Konkrétně šlo o záření s vlnovou délkou 1,3 mm přijímané sítí radioteleskopů na mnoha místech Země. Této síti – a hlavně celému projektu, který zahrnuje i následné zpracování dat – se říká ***Event Horizon Teleskop***.[188] Signály z radioteleskopů jsou zpracovávány dohromady, a co do směrového rozlišení celá síť funguje jako jeden radioteleskop s rozměrem odpovídajícím rozměru Země.[189]

Přijímané radiové záření je vyzařováno horkým plynem v okolí černé díry, její horizont v přijímaném obrazu vidíme jako stín.[190] Kolem něj je jasný zářící prstenec. „Fotografii" najdete na mnoha místech na webu.[191]

Fascinující je, uvědomit si, jak pokročilá musí být analýza získaných dat. Průměr prstence na „fotografii" odpovídá úhlu, pod kterým ho ze Země vidíme, jen asi 40 milióntin úhlové vteřiny.[192] Přitom úhlové rozlišení EHT je, jak jsme už uvedli, 25 milióntin úhlové vteřiny. Na první pohled se zdá nemožné, dostat při tomto rozlišení použitelný obrázek, ale zdařilo se to – takový úspěch si opravdu zaslouží ocenění![193]

Analýza dat, postupně získávaných už od roku 2009, přináší i informace o tom, jak se zářící prstenec s časem trochu mění.[194] Informací v budoucnu bude nepochybně přibývat.

Kvazary

V přehledu informací o černých dírách nelze nezmínit *kvazary*. Jejich název, resp. jeho anglická podoba *qasar* je zkratkou z „*quasi-stellar radio source*", tedy „kvazihvězdný radiový zdroj". Byly opravdu objeveny pomocí radioastronomických pozorování na přelomu 50. a 60. let minulého století. Uvádí se, že jako první byl objeven objekt 3C 48; ale prvním objektem skutečně rozpoznaným jako nový druh astrofyzikálních objektů (označených pak jako kvazary) byl 3C 273.

---

[188] Volně přeloženo tedy „teleskop pro pozorování horizontů událostí", označuje se i zkratkou EHT. Podrobnější informace jsou na stránkách projektu: https://eventhorizontelescope.org/. V roce 2017, kdy byla získávána data, která vedla k uvedené „fotografii", tvořilo síť EHT 8 radioteleskopů. Na podzim 2020 jich je 9, další mají přibýt v roce 2021. Projekt je rozvíjen konsorciem 13 vědeckých institucí.

[189] Jde o interferometrii na velmi dlouhé základně, VLBI, zmíněnou už výše. Úhlové rozlišení můžeme odhadnout z poměru vlnové délky a velikosti celého teleskopu (za ten lze přibližně vzít průměr Země). Tento poměr je asi 10^{-10}; a 10^{-10} radiánu je asi 20 milióntin úhlové vteřiny. Tímto odhadem jsme se docela „strefili", článek https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab0ec7/pdf uvádí úhlové rozlišení 25 milióntin úhlové vteřiny.

[190] Není to samozřejmě jednoduchý stínový obrázek, při teoretickém výpočtu, jak bude záření od černé díry vypadat, je potřeba propočítat šíření elektromagnetického záření v zakřiveném prostoročase v okolí černé díry. Proto je pozoruhodné a povzbuzující, že zachycený obraz odpovídá teoretickým předpovědím.

[191] Například na stránce EHT https://eventhorizontelescope.org/press-release-april-10-2019-astronomers-capture-first-image-black-hole nebo na https://en.wikipedia.org/wiki/Event_Horizon_Telescope#/media/File:Black_hole_-_Messier_87_crop_max_res.jpg.

[192] Můžeme si to přepočítat sami ze vzdálenosti M87* a poloměru prstence v místě dané černé díry. Poloměr prstence je ovšem větší než poloměr horizontu (braný jako Schwarzschildův poloměr pro hmotnost $6{,}4\cdot10^9\ M_\odot$, ten je asi $r_g \doteq 1{,}9\cdot10^{13}$ m). Z pohybu fotonů v prostoročasu Schwarzschildovy černé díry lze totiž teoreticky spočítat, že jsou zachyceny všechny fotony se srážkovým parametrem menším než $(3/2)\sqrt{3}\ r_g$. To je asi$\cdot10^{13}$ m; průměr prstence je tedy necelých 10^{14} m. Po vydělení vzdáleností M87* (přepočet z miliónu světelných let na metry dá vzdálenost $5{,}1\cdot10^{23}$ m) dostaneme úhel asi $2\cdot10^{-10}$ radiánů. Přepočet na milióntiny úhlové vteřiny, dá právě asi 40 μas. (Zde jsme použili označení μas obvyklé v anglických pramenech, jde o zkratku z „micro arc second".)

[193] Nejde přitom o žádný „podfuk" nebo výsledek typu „přání otcem myšlenky". Možnost získat lepší rozlišení je dána tím, že nešlo o jeden „mžikový snímek", ale o zpracování velkého objemu získaných dat.

[194] Viz https://eventhorizontelescope.org/blog/wobbling-shadow-m87-black-hole, kde lze vidět řadu statických obrázků i video ukazující časový vývoj.

Čím jsou kvazary tak odlišné od jiných radiových zdrojů?

Díky posuvu jejich spektrálních čar bylo zjištěno, že nejde o objekty v naší Galaxii, ale o objekty velmi vzdálené.[195] Například kvazar 3C 273, který je přitom jedním z nejbližších, je od nás vzdálen skoro 750 Mpc (megaparseků), tedy 2,4 miliard světelných let.[196] (Připomeňme, že průměr disku naší Galaxie je asi dvě stě tisíc světelných let.)

Ovšem když se ze vzdálenosti kvazarů a z energie, kterou od nich přijímáme zde na Zemi, spočte jejich vyzařovaný výkon, vychází obrovský – kvazary září i stokrát až tisíckrát víc, než běžná galaxie![197] (Jde o výkon sečtený přes všechny oblasti spektra.) Přitom nejde o náhlé a poměrně krátkodobé vzplanutí, jako u supernov, ale o výkon vyzařovaný dlouhodobě.

Přitom ovšem rozměry těchto objektů jsou relativně malé. Ne sice tak malé, jako rozměry hvězd typu našeho Slunce, ale řádu světelných hodin, dnů až týdnů.[198] Jak je možné, že se v rozměrech srovnatelných s rozměry sluneční soustavy uvolňuje výkon větší, než dají bilióny hvězd?

Ukazuje se, že na to nestačí termojaderná syntéza. Akrece materiálu na superhmotnou černou díru ale takový výkon dát může – a je to také jediný proces, který současná fyzika zná, který může dané výkony vysvětlit. Všeobecně je proto přijat názor, že právě superhmotné černé díry jsou „motorem“ aktivity kvazarů.[199]

Dodejme, že ač jsme zde uvedli příklady jen jednoho, resp. dvou kvazarů, ve skutečnosti je jich známo už mnoho set tisíc.[200]

[195] Pokud se posuv jejich spektrálních čar k delším vlnovým délkám interpretuje jako Dopplerův posuv, vychází pro ně velká rychlost vzdalování. Tato rychlost ale není dána jejich lokálním pohybem vůči okolním objektům, ale rozpínáním celého vesmíru. (Vhodnější je proto mluvit o *kosmologickém rudém posuvu*; počítat se musí podle vztahů OTR.)

[196] Se vzdáleností v takto velkých měřítkách je to v rozpínajícím se vesmíru trochu složitější než v euklidovském prostoru, ale dobrou představu tento údaj poskytne. (Uvedená hodnota znamená tzv. luminozitní vzdálenost.)

[197] U kvazaru 3C 273 se uvádí celkový výkon řádu 10^{40} W. (Pro srovnání: Slunce má celkový výkon asi $3{\cdot}10^{26}$ W.) Výkon je ovšem různý v různých částech frekvenčního spektra, nejvyšší je v rentgenové oblasti. Pokud se zajímáte o tyto a další detaily daného kvazaru, tak opravdu *hodně* informací najdete na https://ned.ipac.caltech.edu/cgi-bin/objsearch?objname=3C+273&extend=no&out_csys=Equatorial&out_equinox=J2000.0&obj_sort=RA+or+Longitude&zv_breaker=30000.0&list_limit=5&img_stamp=YES .

[198] Tohle plyne z časové proměnlivosti jejich signálů. Pro kvazar 3C 273 lze najít údaj, že nejkratší doba, za níž se mění jeho signály, je asi půl dne. Z toho by plynulo, že rozměry daného centrálního objektu nemohou být větší než půl světelného dne, tj. řádově 10^{13} m. To je méně než 100 AU (astronomických jednotek), což je asi průměr Sluneční soustavy, včetně Kuiperova pásu.

[199] U kvazaru 3C 273, který zde opakovaně uvádíme jako příklad, se odhaduje hmotnost černé díry, která je jeho „motorem“, na asi 900 miliónů $M_\odot$.

[200] Katalog https://www.sdss.org/dr16/algorithms/qso_catalog/ jich ke dni psaní tohoto textu uvádí přes 750 tisíc.

4. 4 Závěr

Relativistická astrofyzika je rychle se rozvíjející oblastí, takže mnohé konkrétní informace uvedené v tomto studijním textu budou zastarávat. Aktuální informace si proto prosím dohledávejte sami – námětů, kde hledat, bylo na předchozích stránkách uvedeno dost. Výchozím bodem mohou být stránky anglické Wikipedie, kde je řada odkazů i na originální prameny; přirozeným zdrojem informací budou stránky NASA, LIGO a další webové zdroje včetně popularizačních (z českých je kvalitním zdrojem například známý Aldebaran).

Astrofyzikální objekty jako pulzary a černé díry jsou pro řadu žáků a studentů zajímavé a přitažlivé. Jejich popularitu by možná šlo použít i jako motivaci pro školní výuku – alespoň to má zřejmě na mysli NASA svou publikací Black Hole Math.[201] Na 126 stránkách nabízí aktivity využitelné při výuce matematiky a fyziky na středních školách. Třeba pro vás mohou být inspirací, nebo vymyslíte vlastní nové a neotřelé nápady…

[201] Viz https://www.nasa.gov/sites/default/files/atoms/files/black_hole_math.pdf.

Shrnutí

Od geometrie v rovině přes geometrii na sféře k zakřivenému prostoročasu

Vzdálenost bodů

V euklidovské rovině:

(platí euklidovská geometrie: součet úhlů v trojúhelníku je 180°, obvod kruhu $2\pi r$, k přímce bodem 1 rovnoběžka)

v kartézských souřadnicích: $(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ (nezáleží na natočení a posunutí os, tj. $(\Delta l)^2$ je invariantní)

v polárních souřadnicích: $(\Delta l)^2 = (\Delta r)^2 + (r\Delta\varphi)^2$

Na sféře: $(\Delta l)^2 = (R\Delta\theta)^2 + (R\sin\theta\,\Delta\varphi)^2$ … (neplatí euklidovská geometrie)

Na zakřivených plochách obecně: $(\Delta l)^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} g_{ij}\,\Delta x^i \Delta x^j \equiv g_{ij}\,\Delta x^i \Delta x^j$, resp. $(dl)^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j$

g_{ij} jsou složky ***metrického tenzoru***; popisují, jak je plocha zakřivená, ale závisejí i na volbě souřadnic,

Čtyřinterval

Ve speciální teorii relativity (tj. **v plochém prostoročase**):

(*x, y, z* jsou kartézské souřadnice): $(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$

$(\Delta s)^2$ stejné ve všech IS, $\eta_{\mu\nu}$ .. složky Minkowského tenzoru $\eta_{00} = -1,\ \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = +1,\ \eta_{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha \neq \beta$

(*r*, θ a φ jsou sférické souřadnice): $(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta r)^2 + (r\,\Delta\theta)^2 + (r\sin\theta\,\Delta\varphi)^2$

V obecné teorii relativity (tj. **v zakřiveném prostoročase**):

$$(\Delta s)^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\,\Delta x^\mu \Delta x^\nu \text{ , resp. } (ds)^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu$$

Příklad: sféricky symetrické gravitační pole … ***Schwarzschildova metrika***:

$$(ds)^2 = -c^2\left(1 - r_g/r\right)(dt)^2 + \frac{(dr)^2}{(1 - r_g/r)} + (r\,d\theta)^2 + (r\sin\theta\,d\varphi)^2$$

gravitační poloměr (též *Schwarzschildův poloměr*): $r_g = \dfrac{2GM}{c^2}$

Velikost efektů OTR

Je dána poměrem $\dfrac{r_g}{r}$ (pozn.: $2G/c^2 \doteq 1{,}5\cdot10^{-27}$ m/kg).

objekt	hmotnost M („typická“)	gravitační poloměr r_g	poloměr r („typický“)	r_g/r
Země	$6\cdot10^{24}$ kg	0,9 cm	$6\cdot10^{3}$ km	$1\cdot10^{-9}$
Slunce	$2\cdot10^{30}$ kg	3 km	$7\cdot10^{5}$ km	$4\cdot10^{-6}$
bílý trpaslík	$2\cdot10^{30}$ kg	3 km	$6\cdot10^{3}$ km	$5\cdot10^{-4}$
neutronová hvězda	$3\cdot10^{30}$ kg	4 km	12 km	0,3

Statická sféricky symetrická hvězda

Rovnice hydrostatické rovnováhy:

newtonovská: $$\frac{dp}{dr} = -G\frac{M(r)\,\rho(r)}{r^2}$$

dle OTR je gradient tlaku větší (TOV rovnice): $$\frac{dp}{dr} = -G\frac{\left(M(r)+4\pi r^3 p/c^2\right)\left(\rho+p/c^2\right)}{r\left(r-2GM(r)/c^2\right)}$$

Při vysokých hustotách tlak vytváří (i při nízké teplotě):

Elektronový Fermiho plyn: $p = k\,\rho^{\frac{5}{3}}$ (pro rychlosti elektronů << *c*), $p = \tilde{k}\,\rho^{\frac{4}{3}}$ (v ultrarelat. oblasti)

(významný je pro hustoty 10^6 až asi 10^{15} kg/m^3)

Neutronový Fermiho plyn: $p = \tilde{\tilde{k}}\,\rho^{\frac{5}{3}}$ (pro rychlosti neutronů << *c*)

(významný je pro hustoty řádu 10^{17} kg/m^3 a vyšší; roli hraje i odpudivá interakce neutronů)

Bílí trpaslíci

Hmotnosti od asi 0,2 $M_\odot$ do asi 1,4 $M_\odot$ (***Chandrasekharova mez***). (většina má 0,4 až 0,7 $M_\odot$)

Poloměry srovnatelné s poloměrem Země; větší hmotnost => menší poloměr. ($R \sim M^{-1/3}$)

Příklad: Sirius B

Neutronové hvězdy

Hmotnosti od asi 1 $M_\odot$ do asi 2 $M_\odot$, možná až 2,3 $M_\odot$ (***TOV mez***). (typická hmotnost: 1,4 $M_\odot$)

Poloměry: asi 10 až 15 km (typicky 11 až 12 km).

Vznik: výbuchem supernovy (typu Ib, Ic nebo II) (kolaps jádra hvězdy, z hvězd o hmotnosti asi 8 až 25 $M_\odot$)

Pozorovány jako: **pulzary** (rotují, periody od 1,3 ms, pulzy díky majákovému efektu, silné mag. pole)

Příklady: pulzar v Krabí mlhovině (perioda 33 ms), binární pulzar PSR 1913+16; pulzarů známo téměř 3 tisíce

---

Černé díry

První úvahy (v newtonovské fyzice): John Michell (1783), úniková rychlost > *c*

Schwarzschildova černá díra: metrika: $(ds)^2 = -c^2\left(1-r_g/r\right)(dt)^2 + (dr)^2/(1-r_g/r) + \left(r\,d\theta\right)^2 + \left(r\sin\theta\,d\varphi\right)^2$

Souřadnice: r .. obvod kružnice r=konst. dělený 2π, t .. čas vzdáleného pozorovatele

Horizont: $r = r_g$, funguje jako jednosměrně propustná membrána (ani světlo neprojde ven)

(na horizontu není skutečná singularita, jen souřadnicová, slapové síly jsou konečné)

Pod horizontem: přehození role souřadnic (r je časovou, t prostorovou; viz též *Kruskalův diagram*)

Singularita: v $r = 0$, divergují slapové síly (invarianty Riemannova tenzoru)

singularita se nutně vyvine i v obecných příkladech (teorémy Penrose a Hawkinga)

Černé díry obecně charakterizovány: hmotností, momentem hybnosti, nábojem („no-hair" teorém)

Černá díra: Schwarzschildova (tj.nerotující, nenabitá), Kerrova (rotující, nenabitá), Kerrova-Newmannova (rot., nabitá)

černé díry hvězdných hmotností (jednotky až desítky $M_\odot$)

– ve dvojhvězdách jsou zdrojem rtg. záření (díky akreci), známo několik desítek (potvrzených i kandidátů)

– jejich srážky budí gravitační vlny, zachycovány detektory (LIGO a Virgo) (zachyceno několik desítek)

superhmotné černé díry (hmotnosti řádu 10^5 až 10^{10} $M_\odot$)

– v jádrech galaxií (příklady: v jádru naší galaxie: Saggitarius A*, hmotnost asi $4\cdot10^6$ $M_\odot$
v jádru galaxie Messier 87 černá díra M 87* => první „snímek" černé díry)

– v **kvazarech** (vzdálené zdroje vyzařující víc než celá galaxie, černé díry jsou „motorem" jejich aktivity)

Dodatek 4.A Čtyřinterval ve speciální teorii relativity (a Minkowského prostoročas)

V tomto dodatku připomeneme některé vlastnosti čtyřintervalu v STR a ukážeme, proč čtyřinterval hraje v prostoročase roli analogickou vzdálenosti ve třírozměrném prostoru nebo v rovině – tedy proč má v prostoročase geometrický význam.

Nechť A a B jsou dvě události, třeba start kosmické sondy na Zemi a její přistání na Marsu, nebo vyslání a přijetí světelného signálu. Souřadnice těchto událostí v nějaké inerciální soustavě S označíme $x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A}, t_\mathrm{A}$ a $x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}, z_\mathrm{B}, t_\mathrm{B}$.[202] Rozdíly souřadnic označíme Δx, Δy, Δz a Δt.[203] Čtyřinterval daných událostí je

$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \ . \qquad (4.A.1)$$

Čtyřinterval ale můžeme spočítat i v jiné inerciální soustavě S' se souřadnicemi x', y', z' a t':

$$(\Delta s')^2 = -c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \ .$$

Platí ovšem

$$(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2 \ , \qquad (4.A.2)$$

čili čtyřinterval mezi dvěma událostmi je stejný, ať ho určíme v kterémkoli inerciálním systému![204]

To znamená, že **čtyřinterval nezávisí na volbě inerciálního systému**, závisí jen na daných událostech – podobně, jako vzdálenost dvou bodů v rovině nezávisí na volbě soustavy souřadnic. Právě proto můžeme říci, že čtyřinterval dvou událostí má geometrický význam.[205]

Samozřejmě, jsou zde jisté rozdíly. Veličina $(\Delta s)^2$ může být kladná i záporná. A je-li rovna nule, neznamená to, že dané události jsou totožné.

Je tomu tak proto, že čas má v STR jiné postavení, než prostorové souřadnice. Jinak se to také vyjadřuje konstatováním, že **geometrie prostoročasu STR je pseudoeuklidovská**.

Za zmínku stojí, že pro prostoročas STR se užívá název *Minkowského prostoročas*.[206]

Připomeňme si význam $(\Delta s)^2$ v několika speciálních případech; hodí se to i při diskusi o vlastnostech prostoročasu černých děr.

- Pro události, které v inerciálním systému S nastávají **ve stejném čase** t (tj. pro které je $\Delta t = 0$), plyne z (4.A.1):

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta l)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \Delta l \ , \qquad (4.A.3)$$

kde Δl je vzdálenost daných událostí (tedy vzdálenost bodů, v nichž události nastávají).

---

[202] Samozřejmě x, y, z jsou prostorové a t časová souřadnice.

[203] $\Delta x = x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}$ atd.

[204] Přesvědčit se o tom můžete tak, že vyjádříte x', y', z' a t' pomocí x, y, z a t pomocí Lorentzovy transformace a dosadíte do (4.A.2). (Odvození je na úrovni střední školy; na této úrovni je samozřejmě na vás, zda přitom pro zájemce použijete termín *invariant*, tedy zda řeknete, že čtyřinterval je invariantem Lorentzovy transformace.)

[205] To, že nezávisí na volbě soustavy souřadnic, se také vyjadřuje konstatováním, že jde o veličinu *absolutní.* (V teorii relativity není vše relativní!)

[206] Podle *Hermana Minkowského* (1864-1909) který dal v roce 1907 speciální teorii relativity geometrickou interpretaci.

V jiných inerciálních systémech obecně tyto události nejsou současné, v některých systémech nastává dříve událost A, v jiných událost B.[207]

- Pro události, které v systému S nastávají **na stejném místě** (tedy je $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$) je

$$(\Delta s)^2 = -c^2 (\Delta t)^2 \tag{4.A.4}$$

Nemusíme se zde zabývat tím, že Δs by bylo imaginární, pracujeme prostě stále s $(\Delta s)^2$, nemusíme ho odmocňovat. Z (4.A.4) vidíme, že rozdíl časů daných událostí je $\Delta t = \sqrt{-(\Delta s)^2 / c^2}$.[208]

V jiných inerciálních systémech události nejsou na témže místě a jejich časový rozdíl je jiný. Čtyřinterval je ovšem stejný [209], a stále dává informaci o době, která uplynula mezi událostmi. O jakou dobu jde, můžeme ilustrovat na příkladu:

První událostí bude odlet rakety od Země, druhou přílet třeba do soustavy Proximy Centauri. Budeme přitom předpokládat, že se raketa pohybuje rovnoměrně přímočaře. Hodiny H na palubě měří *vlastní čas* τ. Jakou dobu naměří od odletu do příletu?

Odpověď je jednoduchá. S raketou spojíme inerciální systém S. V něm jsou hodiny H v klidu, takže měří čas systému S, je tedy $\tau = t$ (případně až na aditivní konstantu). To znamená, že doba, kterou naměří mezi událostmi, je

$$\Delta\tau = \sqrt{-(\Delta s)^2 / c^2} \ . \tag{4.A.5}$$

Poznamenejme, že toto je i doba, o kterou během letu zestárnou kosmonauti.

- Pro události, pro které je čtyřinterval **nulový**, $(\Delta s)^2 = 0$, platí, že je lze spojit světelným signálem.[210]

To je vidět z (4.A.1), když jej zapíšeme jako $(\Delta s)^2 = -c^2 (\Delta t)^2 + (\Delta l)^2$, kde Δl je vzdálenost daných bodů.[211] Pro $(\Delta s)^2 = 0$ odtud plyne $0 = -c^2 (\Delta t)^2 + (\Delta l)^2 \Rightarrow \Delta l = c\,\Delta t$. Signál se tedy pohybuje rychlostí c. (Pohyb bereme ve vakuu.)

Navíc, je-li čtyřinterval nějakých událostí nulový v jednom inerciálním systému, je nulový ve všech inerciálních systémech. Toto je vlastně jen jiné vyjádření principu konstantní rychlosti světla: Odvození provedené v předchozím odstavci platí pro libovolný inerciální systém – takže když $(\Delta s)^2 = 0$ ve všech inerciálních systémech, světlo se (ve vakuu) pohybuje rychlostí c vůči libovolnému inerciálnímu systému.

[207] Dané události tedy rozhodně nemůžeme spojit signálem, Pro úplnost uveďme, že čtyřinterval, pro který je $(\Delta s)^2 > 0$, se nazývá *prostorový*.

[208] Zde odmocňujeme $-(\Delta s)^2$, to už je kladné číslo.

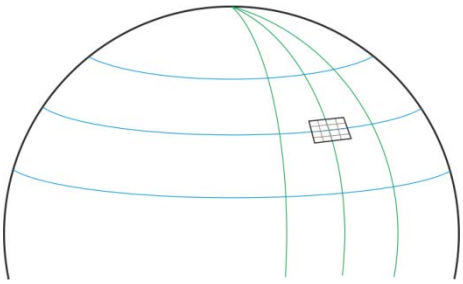
[209] A to záporný, $(\Delta s)^2 < 0$; takovýto čtyřinterval se nazývá *časový*.

[210] Takovýto čtyřinterval se proto také nazývá *světelný*.

[211] Je $(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$

Dodatek 4.B Lokální inerciální systém v zakřiveném prostoročase

Jak do popisu zakřiveného prostoročasu obecné teorie relativity pomocí metrického tenzoru zapadají lokální inerciální systémy, které jsme zmiňovali a využívali v předchozí kapitole?



Celkem snadno. Pomůžeme si opět dvourozměrnou analogií. I na sféře, která je zakřivená, můžeme malou oblast mapovat na část roviny, jak to ukazuje obrázek. Takhle ostatně fungují třeba turistické mapy nebo plán města – ukazují nám krajinu zobrazenou na rovnou plochu papíru.[212] Když na mapě zobrazíme třeba okolí budov MFF v Tróji [213], zakřivení povrchu Země zanedbáváme. Jisté zkreslení sice působí, ale to je pro naši **lokální** mapu jen nepatrné.

Jiný názorný pohled může dát představa papíru přikládaného na kouli. Na velkou část koule papír nepřiložíme tak, aby se nezkrabatil. Malý papírek na kouli přiložit můžeme, a prakticky se téměř nezkrabatí.

Podobně je tomu s lokálním inerciálním systémem.

V zakřiveném prostoročase (například v prostoročase, který obsahuje objekt se silnou gravitací, třeba neutronovou hvězdu nebo černou díru) nemůžeme vytvořit globální inerciální systém, tedy inerciální systém pokrývající celý prostor a čas. Ale **lokálně**, v okolí určité události[214] to možné je.

Takže například ve sféricky symetrickém prostoročase popsaném Schwarzschildovou metrikou (21), tedy

$$\left(ds\right)^2 = -c^2\left(1-r_g/r\right)\left(dt\right)^2 + \frac{\left(dr\right)^2}{\left(1-r_g/r\right)} + \left(r\,d\theta\right)^2 + \left(r\sin\theta\,d\varphi\right)^2 , \qquad (4.B.1)$$

můžeme třeba v okolí události $t = 0$, $r = 10^6\, r_g$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$ vytvořit systém s prostorovými souřadnicemi ξ_1, ξ_2, ξ_3 a časovou souřadnicí τ, v němž čtyřinterval bude dán vztahem

$$\left(ds\right)^2 = -c^2\left(d\tau\right)^2 + \left(d\xi^1\right)^2 + \left(d\xi^2\right)^2 + \left(d\xi^3\right)^2 , \qquad (4.B.2)$$

tedy stejným vztahem, jako ve speciální teorii relativity. Přesněji řečeno, tento vztah bude přesně platit právě pro danou událost, pro body například trochu blíže nebo trochu dále od dané události už zde budou určité odchylky. Ale dostatečně blízko je budeme moci zanedbat.

Jak fyzicky realizovat lokální inerciální systém, jsme poznali už v předchozí kapitole. Může jít třeba o „padající výtah“, tedy o kosmickou loď padající k silovému centru. Nebo také (což bude pro kosmonauty příjemnější) o kosmickou loď obíhající kolem silového centra po kruhové oběžné dráze.[215]

[212] Nebo na rovnou plochu monitoru či tabletu, pokud si zobrazíme mapu elektronickou.

[213] Čtenáře, kteří nejsou pragocentristy, laskavě prosíme, aby si představili místo jejich srdci bližší.

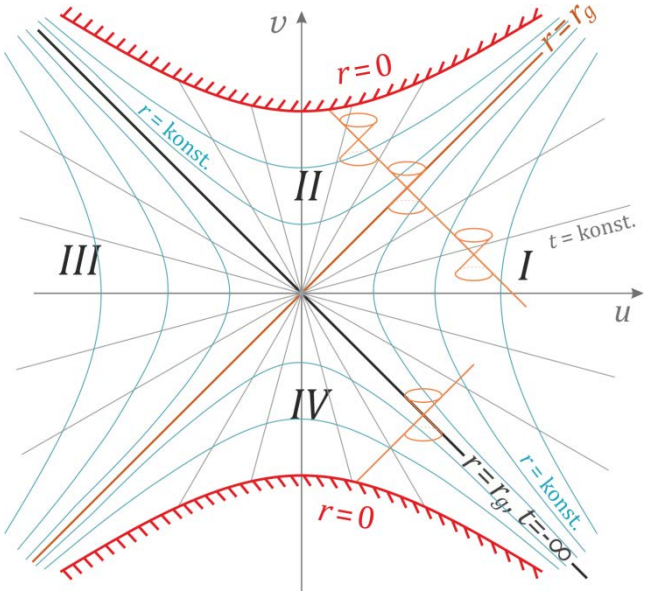
[214] Tedy v okolí určitého místa a po určitý (malý) časový úsek.

[215] Samozřejmě lokálně inerciální budou i všechny další systémy, které se vůči dané kosmické lodi pohybují rovnoměrně přímočaře.

V takové kosmické lodi, jak jsme už diskutovali, bude beztížný stav. Efekty slapových sil ovšem kosmonauti mohou pocítit – právě tyto efekty určí, jak moc musí být daný systém souřadnic malý, abychom ho mohli brát za inerciální.

Dodatek 4.C Kruskalův diagram pro maximální prodloužení Schwarzschildovy metriky

Kruskalovy diagramy, které jsme uváděli v části 4.3 této kapitoly, vypadaly „seříznuté“, jako by jim chyběla levá dolní polovina. Pokud si ale vyhledáme na webu název „Kruskalův diagram“, většinou získáme obrázky, kde je i druhá polovina:[216]



Tenhle diagram získáme, když Schwarzchildovo řešení Einsteinových rovnic prodloužíme „co jen to jde“.[217]

Výše jsme zobrazovali jen části diagramu I a II. Část I zahrnovala celý vesmír vně Schwarzschildovy černé díry[218], část II vnitřek černé díry pod horizontem, až k singularitě $r = 0$.

Kruskalův diagram maximálně prodlouženého řešení obsahuje ještě části III a IV. Část III představuje jiný vesmír (také asymptoticky plochý) a část IV další oblast pod horizontem. Jak ale vidíme ze světelného kužele, z oblasti pod horizontem k nám (do našeho vesmíru I) z oblasti IV mohou přicházet signály a částice, které by vyslala singularita.[219] Toto řešení Einsteinových rovnic popisuje hypotetickou *bílou díru*, z níž by částice mohly vylétat, ale naopak by do ní nemohly vlétnout.

Je třeba podotknout, že bílé díry dosud ve vesmíru nebyly pozorovány; navíc by porušovaly princip (resp. hypotézu) kosmické cenzury, protože singularita bílé díry by byla vidět, ovlivňovala by vnější vesmír.[220] Připomeňme, že u skutečných černých děr oblasti III a IV neexistují, protože uvnitř kolabující hvězdy je řešení Einsteinových rovnic jiné, než popisuje Schwarzschildova metrika.

---

[216] Tedy části označené na obrázku jako III a IV.

[217] Přesně matematicky vyjádřeno jde o maximální analytické prodloužení Schwarzschildova řešení.

[218] Připomeňme, že Schwarzschildovo řešení popisuje jedinou černou díru v prázdném prostoru (který je asymptoticky plochý).

[219] Ta ve spodní části diagramu.

[220] Navíc nelze předpovědět, co ze singularity vyletí. Takže bílé díry by porušovaly něco, co je ve fyzice velmi důležité a co v ní opakovaně využíváme: skutečnost, že z pohybových rovnic a počátečních podmínek umíme předpovědět budoucí vývoj – a experimenty ho pak ověřovat. U bílé díry bychom nemohli předpovědět nic. (Třeba by mohla emitovat neznámé částice nebo počítač Hlubina myšlení nebo sedmihlavého draka, fyzika by o tom nemohla říci nic.)